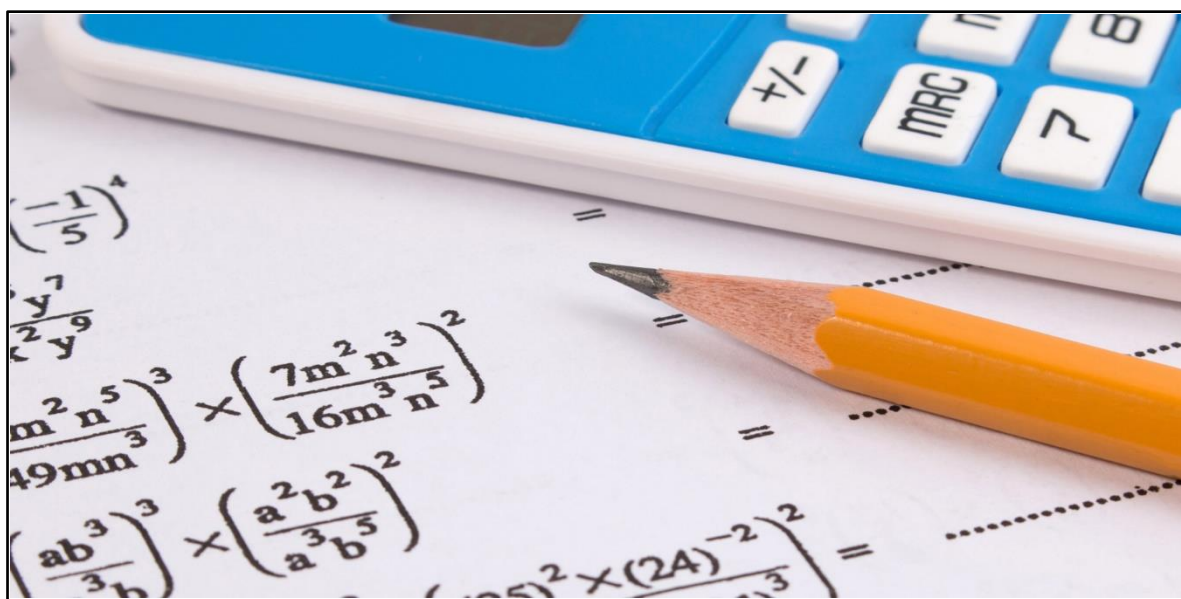


# Matematika

## Baze za drugi kolokvijum

Preko 100 dodatnih kolokvijumskih zadataka za vežbanje



**SKRIPTE  
EKOF**

Spremite ispit - lako i efikasno!

### SKRIPTE ZA MATEMATIKU 2020/21

I kolokvijum		→	<b>II kolokvijum</b>		→	III kolokvijum		→	Ispit		
Skripta	Baze		Skripta	Baze		Skripta	Baze		Skripta	Baze	Rokovi
Primeri	Pregledi		Primeri	Pregledi		Primeri	Pregledi		Teorija	Zamenski	

© 2020 Skripte Ekof. Sva prava su zadržana. Autor zabranjuje beleženja i umnožavanja svog dela u celosti ili delimično, bilo kojim sredstvima, u bilo kom obliku, na bilo koji trajni ili privremeni, posredni ili neposredni način. (član 20. Zakona o autorskom i drugim srodnim pravima „Službeni glasnik RS“, br. 104/2009, 99/2011, 119/2012, 29/2016 - Odluka US RS i 66/2019)

## ЛЕКЦИЈА 15: ГАУСОВ МЕТОД

### Задатак 1

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ \text{Решити систем линеарних једначина: } x - y + 3z &= 6 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

Решење:

$$\begin{array}{l} x + y + z = 4 \quad / \cdot (-1) \\ x - y + 3z = 6 \\ x + y - z = 0 \end{array} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \oplus \\ \oplus \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \begin{array}{l} x + y + z = 4 \Rightarrow x + 1 + 2 = 4 \Rightarrow \boxed{x=1} \\ -2y + 2z = 2 \Rightarrow -2y = -2 \Rightarrow \boxed{y=1} \\ -2z = -4 \Rightarrow \boxed{z=2} \end{array}$$

$$\text{Решење: } (x, y, z) = (1, 1, 2)$$

### Задатак 2

$$\begin{aligned} y + z &= 3 \\ \text{Решити систем линеарних једначина: } x + z &= 2 \\ -x + y &= 1 \end{aligned}$$

Решење:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} / \cdot (-1) \\ \left. \begin{array}{l} \oplus \\ \oplus \end{array} \right\} \Rightarrow \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \oplus \\ \oplus \end{array} \right\} \Rightarrow \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y + z = 3 &\Rightarrow \boxed{z = \alpha}, \quad \boxed{y = 3 - \alpha} \\ \Rightarrow x - y = -1 &\Rightarrow x - (3 - \alpha) = -1 \Rightarrow \boxed{x = 2 - \alpha} \end{aligned}$$

$$\text{Решење: } (x, y, z) = (2 - \alpha, 3 - \alpha, \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

**Задатак 3**

$$\begin{aligned} & 3z - 3y + 3x = 6 \\ \text{Решити систем линеарних једначина: } & 22x - 22y + 22z = 44 \\ & -12y + 12x - 12z = 24 \end{aligned}$$

Решење:

$$\begin{aligned} 3z - 3y + 3x &= 6 \quad /:3 & z - y + x &= 2 \\ 22x - 22y + 22z &= 44 \quad /:22 & \Rightarrow x - y + z &= 2 & \Rightarrow \\ -12y + 12x - 12z &= 24 \quad /:12 & -y + x - z &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y + z &= 2 \quad / \cdot (-1) \quad / \cdot (-1) & x - y + z &= 2 & \Rightarrow \boxed{x = 2 + \alpha} \\ \Rightarrow x - y + z &= 2 & \leftarrow \oplus & \Rightarrow & 0 = 0 \\ x - y - z &= 2 & \leftarrow \oplus & \Rightarrow & -2z = 0 \Rightarrow \boxed{z = 0}, \boxed{y = \alpha} \end{aligned}$$

$$\text{Решење: } (x, y, z) = (2 + \alpha, \alpha, 0), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

**Задатак 4**

$$\begin{aligned} \text{Решити систем линеарних једначина: } & 3x - y + 4z = 3 \\ & 8x + y - 4z = 8 \end{aligned}$$

Решење:

$$\begin{aligned} 3x - y + 4z &= 3 \\ 8x + y - 4z &= 8 \quad \leftarrow \oplus \\ \Rightarrow & \begin{aligned} 3x - y + 4z &= 3 & \Rightarrow 3 - y + 4\alpha = 3 & \Rightarrow y = 4\alpha \\ 11x &= 11 & \Rightarrow \boxed{x = 1}, \boxed{z = \alpha} \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\text{Решење: } (x, y, z) = (1, 4\alpha, \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

**Задатак 5**

$$\begin{aligned}x + y + z &= 2 \\x + z &= 1 \\-x + y + z &= 1\end{aligned}$$

Решење:

$$\begin{array}{l}x + y + z = 2 \quad / \cdot (-1) \\x + z = 1 \quad \leftarrow \oplus \\-x + y + z = 1 \quad \leftarrow \oplus\end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l}x + y + z = 2 \\ \Rightarrow -y = -1 \Rightarrow y = 1 \\ 2y + 2z = 3 \Rightarrow z = \frac{1}{2}\end{array} \Rightarrow x + 1 + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Решење: } (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$

**Задатак 6**

$$\begin{aligned}2x - y &= 1 \\ \text{Решити систем линеарних једначина: } \frac{1}{8}y + \frac{1}{8}z &= 0 \\ 2z &= 4\end{aligned}$$

Решење:

$$\begin{array}{l}2x - y = 1 \Rightarrow 2x = y + 1 = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8}y + \frac{1}{8}z = 0 \Rightarrow y = -2 \\ 2z = 4 \Rightarrow z = 2\end{array}$$

$$\text{Решење: } (x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, -2, 2\right)$$

**Задатак 7**

$$y + z = 2$$

$$\text{Решити систем линеарних једначина: } \begin{array}{rcl} x & & + z = 1 \\ -x + y & & = 1 \end{array}$$

$$-x + y = 1$$

Решење:

$$\begin{array}{rcl} y + z = 2 \\ x + z = 1 \\ -x + y = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc|c} x & y & z & & \\ \hline 0 & 1 & \boxed{1} & & 2 \\ 1 & 0 & 1 & & 1 \\ -1 & 1 & 0 & & 1 \end{array} \xrightarrow{\substack{/\cdot(-1) \\ \oplus}} \sim \begin{array}{c|ccc|c} & & & & \\ \hline 0 & 1 & \boxed{1} & & 2 \\ \boxed{1} & -1 & 0 & & -1 \\ -1 & 1 & 0 & & 1 \end{array} \xrightarrow{\oplus}$$

$$\sim \begin{array}{c|ccc|c} & & & & \\ \hline 0 & 1 & \boxed{1} & & 2 \\ \boxed{1} & -1 & 0 & & -1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} y + z = 2 \Rightarrow z = 2 - \alpha \\ x - y = -1 \Rightarrow y = \alpha, x = \alpha - 1 \end{array}$$

$$\text{Решење: } (x, y, z) = (\alpha - 1, \alpha, 2 - \alpha), \alpha \in \mathbb{R}.$$

**Задатак 8**

$$x + y - z = 1$$

$$\text{Решити систем линеарних једначина: } \begin{array}{rcl} 2x - 4y + 8z = 6 \\ -11x + 11y - 11z = 11 \end{array}$$

$$-11x + 11y - 11z = 11$$

Решење:

$$\begin{array}{c|ccc|c} x & y & z & & \\ \hline \boxed{1} & 1 & -1 & & 1 \\ 2 & -4 & 8 & & 6 \\ -11 & 11 & -11 & & 11 \end{array} \xrightarrow{\substack{/\cdot(-2) \\ \oplus}} \sim \begin{array}{c|ccc|c} & & & & \\ \hline \boxed{1} & 1 & -1 & & 1 \\ 0 & -6 & 10 & & 4 \\ 0 & 22 & -22 & & 22 \end{array} \xrightarrow{\substack{/\cdot 11 \\ \oplus}} \sim \begin{array}{c|ccc|c} & & & & \\ \hline \boxed{1} & 1 & -1 & & 1 \\ 0 & -6 & 10 & & 4 \\ 0 & 22 & -22 & & 22 \end{array} \xrightarrow{\substack{/\cdot 2 \\ \oplus}} \sim \begin{array}{c|ccc|c} & & & & \\ \hline \boxed{1} & 1 & -1 & & 1 \\ 0 & -3 & 5 & & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & & 1 \end{array} \xrightarrow{\substack{/\cdot 3 \\ \oplus}} \sim \begin{array}{c|ccc|c} & & & & \\ \hline 1 & 1 & -1 & & 1 \\ 0 & 1 & -1 & & 1 \\ 0 & 0 & 2 & & 5 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{c|ccc|c} & & & & \\ \hline \boxed{1} & 1 & -1 & & 1 \\ 0 & -3 & 5 & & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & & 1 \end{array} \xrightarrow{\substack{/\cdot 3 \\ \oplus}} \sim \begin{array}{c|ccc|c} & & & & \\ \hline 1 & 1 & -1 & & 1 \\ 0 & 1 & -1 & & 1 \\ 0 & 0 & 2 & & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ y - z = 1 \\ 2z = 5 \Rightarrow z = \frac{5}{2} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} y - \frac{5}{2} = 1 \Rightarrow y = \frac{7}{2} \\ x + \frac{7}{2} - \frac{5}{2} = 1 \Rightarrow x = 0 \end{array}$$

$$\text{Решење: } (x, y, z) = \left(0, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

**Задатак 9**

$$2x + y - z = 1$$

$$\text{Решити систем линеарних једначина: } -x - y + 2z = 2$$

$$x + z = 0$$

Решење:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\oplus} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{/\cdot(-1)} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

Решење: Систем нема решења, зато што је:  $r(A)=2$ ,  $r(A_p)=3$ .

**Задатак 10**

$$\text{Решити систем линеарних једначина: } x + y - 2z = 0.$$

Решење:

$$x + y - 2z = 0 \Rightarrow y = \alpha, z = \beta, x = 2\beta - \alpha$$

$$\text{Решење: } (x, y, z) = (2\beta - \alpha, \alpha, \beta) \in R.$$

**Задатак 11**

$$2x + y - z = 1$$

$$\text{Решити систем линеарних једначина: } x + y - 2z = 1$$

$$x + z = 0$$

Решење:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{/\cdot(-1)} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\oplus} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} 2x + y - z = 1 \\ -x - z = 0 \end{array} \quad z = \alpha \Rightarrow \begin{array}{l} 2x + y = 1 + \alpha \\ x = -\alpha \end{array} \xrightarrow{\oplus} \Rightarrow y = 1 + 3\alpha$$

$$\text{Решење: } (x, y, z) = (-\alpha, 1 + 3\alpha, \alpha), \alpha \in R.$$

**Задатак 12** (\*пређи након лекције 16)

Решити систем линеарних једначина: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решење:

„Фора“ у овом задатку јесте што представља комбинацију са лекцијом 2 у вези матрица. Потребно је да знамо да множимо матрице. Уколико помножимо матрице са леве стране једнакости, добијамо:

$$\begin{pmatrix} x + y + 2z \\ x + 2y + z \\ 2x + 3y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ово претварамо у систем једначина:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 2 \\ x + 2y + z &= -1 \\ 2x + 3y + z &= 1 \end{aligned}$$

Сада можемо применити стандардни поступак, чиме долазимо до решења:

$$(x, y, z) = (5, -3, 0)$$

**Задатак 13**

Решити систем линеарних једначина: 
$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ -3x + 4y - 2z &= 6 \end{aligned}$$

Решење:

$$\begin{aligned} x - 2y + z = 0 \quad / \cdot 3 \\ -3x + 4y - 2z = 6 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \oplus \\ \leftarrow \end{array} \Rightarrow \begin{aligned} x - 2y + z = 0 &\Rightarrow x = 2\alpha - (2\alpha + 6) = -6 \\ -2y + z = 6 &\Rightarrow \boxed{y = \alpha}, \boxed{z = 2\alpha + 6} \end{aligned}$$

Решење:  $(x, y, z) = (-6, \alpha, 2\alpha + 6), \alpha \in \mathbb{R}.$

## ЛЕКЦИЈА 16: МАТРИЦЕ И ДЕТЕРМИНАНТЕ

### Задатак 1

Решити једначину:  $x + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ x & 2 & 5 \end{vmatrix} = -1$

Решење:

$$x + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ x & 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ x & 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow 4x - 16 + 5 = 4x - 11$$

$$\Rightarrow x + 4x - 11 = -1 \Rightarrow 5x = 10$$

Решење:  $x = 2$

### Задатак 2

Решити матричну једначину  $AX^{-1} = B$ .

Решење:

$$A \cdot X^{-1} = B \quad / \cdot X \text{ с' десна, } A = B \cdot X \quad / \cdot B^{-1} \text{ с' лева } \Rightarrow B^{-1} \cdot A = B^{-1} \cdot B \cdot X$$

Решење:  $X = B^{-1} \cdot A$ ,  $\det B \neq 0$

### Задатак 3

Одредити ранг матрице:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Решење:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} / \cdot (-1) \\ \leftarrow \oplus \\ \leftarrow \oplus \end{matrix} \oplus \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{Решење: } r(A) = 3$$



**Задатак 4**

Нека је  $A$  матрица система из првог задатка. Одредити алгебарски кофактор  $A_{22}$ .

Дати систем је:

$$\begin{aligned} y + z &= 3 \\ x + z &= 2 \\ -x + y &= 1 \end{aligned}$$

Решење:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{22} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

**Задатак 5**

За матрице  $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  одредити параметре  $a$  и  $b$ , тако да важи  $AB = BA$ .

Решење:

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & ab+1 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ a+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решење:  $b=1$ ,  $a=-1$

**Задатак 6**

Одредити ранг матрице:  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & 8 & 2 \\ -9 & 3 & -12 & -3 \end{pmatrix}$

Решење:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & 8 & 2 \\ -9 & 3 & -12 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} / \cdot (-2) \quad / \cdot 3 \\ \leftarrow \oplus \\ \leftarrow \oplus \end{array} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Решење:  $r(A) = 1$

### Задатак 7

Решити једначину:  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & x \\ x & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2$

Решење:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & x \\ x & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 2 \quad 1 \\ -1 \quad 0 \\ x \quad 2 \end{array} = x^2 - 4x + 5$$

$$x^2 - 4x + 5 = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \rightarrow \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 3$$

Решење:  $x \in \{1, 3\}$

### Задатак 8

Нека су  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  и нека је  $C = A \cdot B$ . Одредити  $c_{22}$ .

Решење:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = A \cdot B$$

$$c_{22} = 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 = -2 \quad \text{Решење: } c_{22} = -2$$

**Задатак 9**

За коју вредност параметра  $a$  систем има тривијално решење:

$$\begin{cases} x + y + az = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ ax + y + z = 0 \end{cases}$$

Решење:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a + a + a - a^3 - 1 - 1 = -a^3 + 3a - 2$$

$$\Delta = -a^3 + a + 2a - 2 = -a(a^2 - 1) + 2(a - 1) = -a(a - 1)(a + 1) + 2(a - 1)$$

$$= (a - 1)(-a^2 - a + 2) \Rightarrow a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{-2}, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = 1$$

$$\Delta = -(a - 1)(a + 2)(a - 1) = -(a - 1)^2(a + 2)$$

Решење:  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ .

**Задатак 10**

Решити матричну једначину:  $X - A^T = A^T B X$

Решење:

$$X - A^T = A^T B X \Rightarrow X - A^T B X = A^T \Rightarrow (I - A^T B)X = A^T \quad / \cdot (I - A^T B)^{-1}$$

$$\text{Решење: } X = (I - A^T B)^{-1} A^T \quad \text{услов: } \det(I - A^T B) \neq 0$$

**Задатак 11**

Одредити ранг матрице:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Решење:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & \boxed{1} \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} / \cdot (-1) \\ \leftarrow \oplus \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & \boxed{1} \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \oplus \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Решење:  $\text{rang}(A) = 2$

### Задатак 12

Решити матричну једначину  $A^{-1}X - B = I$ , где је  $I$  јединична матрица.

Решење:

$$A^{-1}X - B = I \Rightarrow A^{-1}X = I + B \quad / \cdot A \text{ с' лева}$$

$$\Rightarrow AA^{-1}X = A(I + B)$$

Решење:  $X = A(I + B)$

### Задатак 13

Решити матричну једначину  $XA = A - 2X$ .

Решење:

$$XA = A - 2X \Rightarrow XA + 2X = A \Rightarrow X(A + 2I) = A \quad / \cdot (A + 2I)^{-1} \text{ с' лева}$$

Решење:  $X = A \cdot (A + 2I)^{-1}$ ,  $\det(A + 2I) \neq 0$

### Задатак 14

Одредити ранг матрице:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решење:

$$\left( \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} / \cdot (-2) \\ \leftarrow \oplus \\ \leftarrow \oplus \end{array} \oplus \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Решење: } \text{rang}(A) = 2$$

### Задатак 15

За дату матрицу  $A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , одредити вредност параметра  $t$  тако да је испуњено:  $2A - A^2 = I$ .

Решење:

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2A = \begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 2t+2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2A - A^2 = \begin{pmatrix} 2t-t^2 & 0 \\ 2t-2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2t-2=0 \Rightarrow t=1.$$

Решење:  $t=1$

## ЛЕКЦИЈА 17: ИЗВОДИ

### Задатак 1

Наћи први извод функције  $f(x) = \frac{\ln^2(2-x)}{x^2-1}$ .

Решење:

$$f(x) = \frac{\ln^2(2-x)}{x^2-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{-2\ln(2-x)}{2-x}(x^2-1) - \ln^2(2-x) \cdot 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2\ln(2-x) \left[ \frac{x^2-1}{2-x} + x\ln(2-x) \right]}{(x^2-1)^2} = \frac{-2\ln(2-x) [x^2-1+x(2-x)\ln(2-x)]}{(2-x)(x^2-1)^2}$$

$$\text{Решење: } f'(x) = \frac{-2\ln(2-x) [x^2-1+x(2-x)\ln(2-x)]}{(2-x)(x^2-1)^2}$$

### Задатак 2

Нека је  $f(x) = \frac{5-x}{9-x^2}$ . Решити неједначину  $f'(x) > 0$ .

Решење:

$$f(x) = \frac{5-x}{9-x^2} \Rightarrow \text{деф: } 9-x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 3$$

$$D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{-1(9-x^2) - (5-x) \cdot (-2x)}{(9-x^2)^2} = \frac{-9+x^2+10x-2x^2}{(9-x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2+10x-9}{(9-x^2)^2} = \frac{-(x-1)(x-9)}{(9-x^2)^2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100-36}}{-2}$$

$$\rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 9$$

	-3	1	3	9	
$-(x-1)$	+	+	-	-	-
$x-9$	-	-	-	-	+
$f'(x)$	-	-	+	+	-

Решење:  $f'(x) > 0$  за  $x \in (1, 3)$  и за  $x \in (3, 9)$