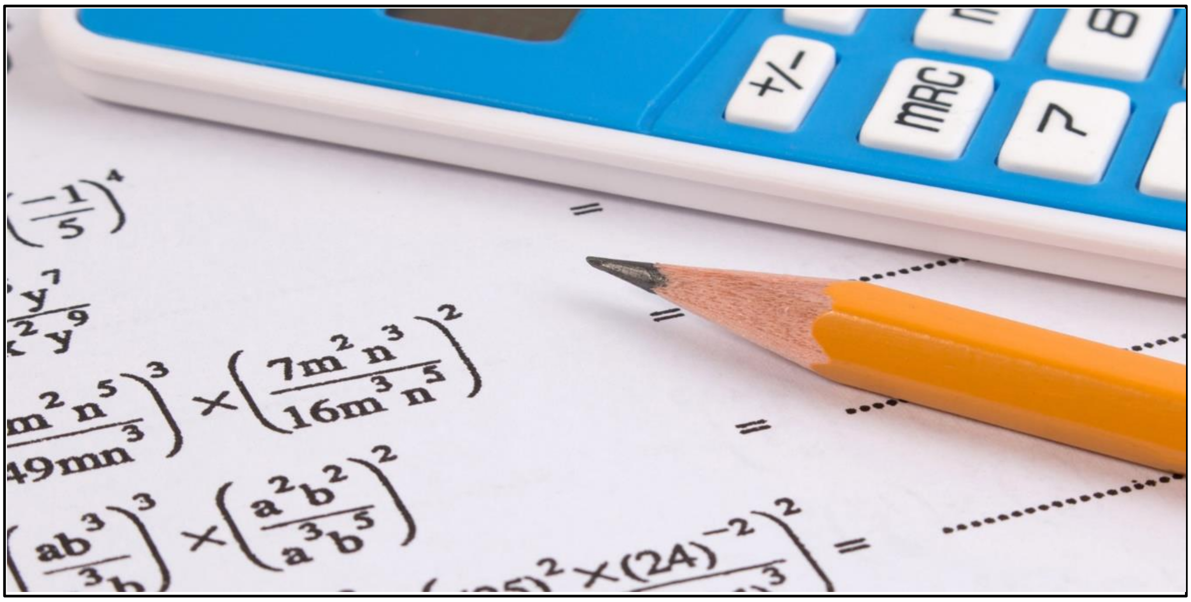
Matematika

Skripta za drugi kolokvijum

Lekcije i rešeni zadaci sa deljnim objašnjenjima



SKRIPTE EKOF | Spremite ispit - lako i efikasno!

SKRIPTE ZA MATEMATIKU 2020/21

I kolokvijum		**II kolokvijum**		III kolokvijum		Ispit		
Skripta	Baze	Skripta	Baze	Skripta	Baze	Skripta	Baze	Rokovi
Primeri	Pregledi	Primeri	Pregledi	Primeri	Pregledi	Teorija	Zamenski	

Lekcija 15: Gausov metod

Pregled lekcije

U okviru ove lekcije imaćete priliku da naučite sledeće:

- **Gausov metod sa jedinstvenim rešenjem** – kako da rešite Gausovim metodom sistem linearnih jednačina ukoliko postoji jedinstveno rešenje za svaku nepoznatu;
- **Gausov metod bez rešenja** – kako da rešite Gausovim metodom sistem linearnih jednačina ukoliko se dobije određeni kontradiktorni izraz pri rešavanju;
- **Gausov metod sa beskonačno mnogo rešenja** – kako da rešite Gausovim metodom sistem linearnih jednačina koji ima beskonačno mnogo rešenja;
- **kolokvijumske trikove za zadatke iz ove oblasti** – obrađene su i brojne „fore“ koje su se javljale na kolokvijumima iz prethodnih godina.

Sistemi linearnih jednačina sa tri nepoznate

Sistemi linearnih jednačina mogu se rešavati na više načina. Za drugi kolokvijum obrađuje se poznat **Gausov metod** rešavanja sistema linearnih jednačina. Suština ovog metoda jeste da manipulišete sistem tako što množite jednačine određenim koeficijentima (brojevima) i dodajete ih drugim jednačinama, tako da se izgube određene nepoznate, te da biste došli do rešenja za jednu nepoznatu. Potom se vraćate unazad kako biste utvrdili vrednosti ostalih promenljivih.

Postoje **tri odvojena slučaja**. Objasnićemo ovo detaljno na standardnom primeru, za sva tri slučaja pojedinačno.

Slučaj 1: Postoji jedinstveno rešenje za svaku nepoznatu

Primer. (izvor: profesorka.wordpress.com)

Gausovim metodom rešavamo sledeći sistem:

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 20 \\ -3x + 4y + 2z &= -7 \\ -x + 2y + z &= -2 \end{aligned}$$

Prvo ćemo proučiti koeficijente uz x: imamo 1, -3 i -1. Da bi koeficijent u prvoj jednačini (1) bio suprotan koeficijentu u drugoj (-3), treba da ga pomnožimo sa 3. Za treću jednačinu ne moramo ništa da radimo, jer su koeficijenti već suprotni.

Dakle, da bi neutralisali x iz druge i treće jednačine, prvo ćemo prvu pomnožiti sa 3 i dodati drugoj, a zatim prvu bez množenja dodati drugoj:

$$\begin{aligned} x-y+3z&=20 \quad /\cdot 3 \;\; / \\ -3x+4y+2z&=-7 \\ -x+2y+z&=-2 \\ \hline x-y+3z&=20 \\ y+11z&=53 \\ y+4z&=18 \end{aligned}$$

Dobili smo jednu jednačinu sa tri nepoznate i dve jednačine sa po dve nepoznate. Sada ponavljamo postupak za drugu i treću jednačinu, da bi eliminisali y iz treće:

$$\begin{aligned} x-y+3z&=20 \\ y+11z&=53 \quad /\cdot(-1) \\ y+4z&=18 \\ \hline x-y+3z&=20 \\ y+11z&=53 \\ -7z&=-35 \end{aligned}$$

Odavde, radom „unazad" računamo z, zamenom dobijamo y i na kraju x:

$$\begin{aligned} -7z=-35 &\Rightarrow z=5 \\ y+11\cdot 5=53 &\Rightarrow y=53-55=-2 \\ x-(-2)+3\cdot 5=20 &\Rightarrow x=20-2-15=3 \end{aligned}$$

Dakle, rešenje je $(x, y, z) = (3, -2, 5)$. Ne zaboravite da proverite da li ste dobro uradili zadatak, tako što ćete zameniti rešenja za nepoznate u početni sistem i proveriti da li dobijate tačne jednakosti:

$$\begin{aligned} 3-(-2)+3\cdot 5&=3+2+15=20 \\ -3\cdot 3+4\cdot(-2)+2\cdot 5&=-9-8+10=-7 \\ -3+2\cdot(-2)+5&=-3-4+5=-2 \end{aligned}$$

NAPOMENA: ZAPIS REŠENJA NA KOLOKVIJUMU I ISPITU

Veoma je bitno da kod sistema linearnih jednačina ne ostavite rešenje kao x=..., y=..., z=... . Na kolokvijumu i ispitu insistiraju da rešenje sistema linearnih jednačina zapišete u obliku **uređenog para**:

$$(x, y, z) = (rešenje\ za\ x, rešenje\ za\ y, rešenje\ za\ z)$$

Razlog zašto na ovome insistiraju jeste što zapis x=..., y=..., z=... ukazuje na to kao da su ova rešenja odvojena rešenja (što je npr. slučaj kod kvadratne jednačine sa dva različita rešenja – x1 i x2). Međutim, ovde je to pogrešno – jedno rešenje sistema linearnih jednačina predstavlja uređen par nepoznatih x, y, z (naravno, mogu zadati i neka druga „slova" umesto ovih klasičnih).

Slučaj 2: Nema rešenja

Primer (izvor: profesorka.wordpress.com)

Gausovim metodom rešavamo sledeći sistem:

$$\begin{aligned} x+y+z&=5\\ 5x+5y+5z&=20\\ 2x+3y-z&=8 \end{aligned}$$

Primenjujemo identičan postupak kao u prethodnom primeru:

$$\begin{aligned} x+y+z&=5 \qquad /\cdot(-5) \; \hookleftarrow + \\ 5x+5y+5z&=20\\ \underline{2x+3y-z}&\underline{=8}\\ x+y+z&=5\\ 0&=-5 \end{aligned}$$

Ono što je ovde specijalno jeste da dobijamo **netačan izraz** – nula nije jednaka -5! **Stoga zaključujemo da naš sistem nema rešenja. Zapis ovog rešenja je:**

$$(x,y,z)\in\emptyset$$

NAPOMENA: ZAPIS REŠENJA KADA NEMA REŠENJA

Na kolokvijumu i ispitu insistiraju da, ukoliko zaključite da sistem linearnih jednačina nema rešenja, zapišete to u obliku

$$(x,y,z)\in\emptyset$$

gde $\in\emptyset$ znači „pripada praznom skupu".

Nikako nemojte zapisati rešenje sa jednako, jer ovo ne priznaju! Pišite znak „pripada":

$$(x,y,z)=\emptyset \quad ✗$$
$$(x,y,z)\in\emptyset \quad ✓$$

Slučaj 3: Beskonačno mnogo rešenja

Primer (izvor: profesorka.wordpress.com)

Gausovim metodom rešavamo sledeći sistem:

$$\begin{aligned} x+y+z&=3\\ x+y-z&=3\\ 2x+2y+z&=6 \end{aligned}$$

Primenjujemo identičan postupak kao u prvom primeru:

$$\begin{aligned}
x+y+z&=3 \quad / \cdot(-1) \quad / \cdot(-2)\\
x+y-z&=3\\
2x+2y+z&=6\\
\hline
x+y+z&=3\\
-2z&=0\\
z&=0\\
z&=0\\
0&=0\\
x+y+0=3 &\Rightarrow x=3-y
\end{aligned}$$

Ono što je ovde specifično jeste da dobijamo **više nepoznatih nego što imamo jednačina** (imamo tri nepoznate, a dve jednačine). Pritom, nismo dobili netačan izraz. **Stoga, znamo da naš sistem jednačina ima beskonačno mnogo rešenja, odnosno da imamo jedan opšti parametar** (pogledajte uokvirenu napomenu ispod).

Potrebno je da izrazimo ova rešenja. Dobili smo da je $z = 0$, tako da to jeste jedina vrednost koju z može da uzme. Međutim, za x i y samo znamo da njihovu vezu: $x = 3 - y$. Jedna promenljiva od ove dve može da uzme bilo koju vrednost iz skupa realnih brojeva, a druga će da zavisi od nje. Na primer, uzmimo da x može da uzme bilo koju vrednost $\alpha \in \mathbb{R}$ (alfa iz skupa realnih brojeva). Tada, izrazimo y:

$$x = 3 - y$$
$$\alpha = 3 - y$$
$$\boldsymbol{y = 3 - \alpha}$$

Konačno rešenje je dakle:

$$(x, y, z) = (\alpha, 3 - \alpha, 0), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Naravno, mogli ste da uzmete i da je $y = \alpha$, pa da izrazite x preko ovoga. Rešenje bi izgledalo drugačije, ali i dalje je u potpunosti validno i bilo bi priznato na kolokvijumu i ispitu (zato nemojte da paničite ukoliko upoređujete rešenja sa kolegama posle kolokvijuma za ovaj zadatak i imate drugačija rešenja!).

NAPOMENA: BROJ NEPOZNATIH – BROJ JEDNAČINA = BROJ PARAMETARA

Da se ne biste zbunili, korisno je da znate da:

➔ ukoliko imate **isti** broj nepoznatih i broj jednačina u sistemu, onda imate nula parametara u rešenjima, odnosno imate jedinstveno rešenje sistema;

➔ ukoliko imate **različit** broj nepoznatih i broj jednačina u sistemu, onda imate neki parametar ili parametre koji su vam potrebni za rešenje, i to gledate po formuli:

$$broj\ nepoznatih - broj\ jednačina = broj\ parametara$$

➲ Za parametar uzimate neko grčko slovo - najčešće to su α (alfa), β (beta) i γ (gama).

➲ Obavezno definišite svaki parametar nakon rešenja u vidu uređenog para:

$$(x, y, z) = (\alpha, 3 - \alpha, 0), \quad \boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$$

Fore za zadatke

Pored osnovnih pravila, potrebno je da imate „keca u rukavu" za rešavanje zadatka ukoliko primetite da ne možete dobiti rešenje standardnim postupcima. Ovde ćemo prezentovati nekoliko „fora" koje su se javljale na prethodnim kolokvijuma i kako ih upotrebiti.

Fora #1: Zbunjujući sistem

Očekivali biste da imate tri jednačine sa tri nepoznate, pa da onda tu nešto radite. Međutim, ponekad zadatak izgleda „čudno" i „zbunjujuće", ali je zapravo vrlo jednostavan. Pogledajmo primer.

Primer.
Rešiti sledeći sistem jednačina Gausovim metodom:

$$x - z = 1$$
$$y = 10$$

Suštinski, stvar je vrlo prosta – samo poredite koliko imate jednačina i koliko imate nepoznatih, pa ćete znati šta da radite. Imamo tri nepoznate (x, y, z), a imamo dve jednačine. Stoga, potrebno je sigurno da uvedemo jedan parametar $\alpha \in \mathbb{R}$ (alfa iz skupa realnih brojeva). Dato nam je već da je $y = 10$, tako da ovo ne diramo. Uzmimo npr. da je $x = \alpha \in \mathbb{R}$. Izrazimo nepoznatu z:

$$x - z = 1$$
$$z = x - 1$$
$$z = \alpha - 1$$

Konačno rešenje zapisujemo u obliku:

$$(x, y, z) = (\alpha, 10, \alpha - 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Fora #2: Izmešani članovi

Očekivali biste da imate tri jednačine sa tri nepoznate, i to da u jednačini uvek prvo imate x, pa y, pa z, a sa desne strane da bude vrednost. Međutim, imajte na umu da mogu da vam izmešaju ove članove. Isto tako, mogu i da daju neka druga slova umesto x, y, z (nemojte da vas ovo zbuni, postupak rešavanja je identičan!). Ono što je potrebno da učinite jeste samo da složite članove u standardni redosled, kada imate izmešane članove.

Primer.
Rešiti sledeći sistem jednačina Gausovim metodom:

$$-3z - 3x + 3y = 6$$
$$22x - 22y + 22z = -44$$
$$-12y + 12z + 12x = -24$$

Ne dajte se zbuniti, potrebno je samo da složimo x, y, z tim redosledom:

$$-3x + 3y - 3z = 6$$
$$22x - 22y + 22z = -44$$
$$12x - 12y + 12z = -24$$

Sada možete standardnim postupkom nastaviti rešavanje sistema. Rešenje koje treba da dobijete jeste:

$$(x, y, z) = (\beta - \alpha - 2, \beta, \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$$

Fora #3: „Rupe"

Očekivali biste da imate tri jednačine sa tri nepoznate, i to da u jednačini uvek prvo imate x, pa y, pa z. Međutim, nekad mogu da vam daju takav zadatak da izostave neku od promenljivih u svakoj ili nekoj jednačini. Uglavnom, izlaz iz ovakve situacije jeste da baratate sa dve jednačine istovremeno, a ne tri kao u standardnom postupku. Pogledajmo sledeći primer.

Primer.

Rešiti sledeći sistem jednačina Gausovim metodom:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 11y & + & 11z & = & 11 \\ 11x & & & + & 11z & = & 22 \\ 11x & + & 11y & & & = & 33 \end{array}$$

Prvo, sve jednačine možemo da podelimo sa 11, da bismo lakše radili sa brojevima:

$$\begin{array}{ccccccc} & & y & + & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 2 \\ x & + & y & & & = & 3 \end{array}$$

Sada, pomnožimo prvu jednačinu sa -1 i dodajmo drugoj (treću jednačinu ne diramo!):

$$\begin{array}{ccccccc} & & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & & & = & 1 \\ x & + & y & & & = & 3 \end{array}$$

Potom, dodajmo drugu jednačinu trećoj jednačini (prvu jednačinu ne diramo!):

$$\begin{array}{ccccccc} & & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & & & = & 1 \\ 2x & & & & & = & 4 \end{array}$$

Iz poslednje jednačine dobijamo da je $x = 2$. Kada ovo ubacimo u drugu jednačinu, dobijamo da je $y = 1$, a kada ovo ubacimo u prvu jednačinu dobijamo da je $z = 0$. Konačno rešenje je:

$$(x, y, z) = (2,1,0)$$

Fora #4: Sistem gde nisu samo brojevi i nepoznate u jednačinama

Očekivali biste da imate tri jednačine sa tri nepoznate, i to da u jednačini uvek prvo imate x, pa y, pa z, i da uz svaku stoji određeni broj, kao i da je svaka jednaka određenom broju. Ovo je naravno validno, ali ponekad žele da vas zbune tako što ovi brojevi nisu odmah očigledni, već žele da provere da li ste zaboravili osnovno gradivo iz eksponencijalne funkcije, logaritamske funkcije, trigonometrijskih funkcija... (za prvi kolokvijum). **Obavezno uvek imajte ovo znanje na umu, ne smete zaboraviti ono što ste učili za prvi kolokvijum!** Pogledajmo sledeći primer.

Primer.
Rešiti sledeći sistem jednačina Gausovim metodom:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & lne^{2z} & = & 3 \\ & & y & & & = & 3\sin(\pi/2) \end{array}$$

Jedino što je neobično u ovom sistemu jesu lne^{2z} i $3\sin(\pi/2)$. Podsetimo se gradiva za prvi kolokvijum:
→ ln je prirodni logaritam (logaritam sa osnovom e). Stepen koji je pod logaritmom može da izađe ispred logaritma. Stoga, imamo da je:

$$lne^{2z} = 2z \cdot \log_e e = 2z$$

→ $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ je lako izračunati ukoliko poznajemo trigonometrijski krug. $\frac{\pi}{2}$ zapravo predstavlja ugao od 90 stepeni, a sinus je jednak vrednosti sa vertikalne ose. Stoga, vrednost ovog sinusa je 1 (jer je sinusna funkcija definisana za vrednosti funkcije između -1 i 1).

Naš sistem jednačina postaje:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 2z & = & 3 \\ & & y & & & = & 3 \end{array}$$

Ovo je sada sistem koji rešavamo poznatim metodama. Konačno rešenje koje treba da dobijete jeste:

$$(x, y, z) = (2\alpha, 3, \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Dodatni sadržaji na našem sajtu

Detaljnije na: ***www.skripteekof.com/matematika***

Lekcija 16: Matrice i determinante

Pregled lekcije

U okviru ove lekcije imaćete priliku da naučite sledeće:

- **osnovne osobine matrica** – šta predstavljaju i kako izgledaju;
- **osnovne operacije sa matricama** – sabiranje, oduzimanje, množenje skalarom i međusobno množenje matrica;
- **važne matrice** – šta predstavlja jedinična, transponovana, adjungovana i inverzna matrica, koji je njihov značaj i kako ih dobijamo;
- **regularna i singularna matrica** – šta predstavljaju, u čemu je razlika i zbog čega je ovo važno;
- **algebarski kofaktor i bazisni minor** – šta predstavljaju i kako se dobijaju;
- **matrične jednačine** – postupak rešavanja standardne matrične jednačine;
- **rang matrice** – postupak za određivanje ranga matrice, za slučaj bez parametra i sa parametrom.

Osnovne osobine i operacije sa matricama

Matrica je skup elemenata koji su poređani u redove i kolone. U matematičkom smislu matricu A zapisujemo na sledeći način:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Elementi matrice su a_{11} ... a_{33}, gde prvi broj u indeksu označava redni broj reda, a drugi broj u indeksu označava redni broj kolone. Ovo je matrica koja ima tri reda i tri kolone (ovo opciono možemo zapisati u indeksu na celu matricu kao 3×3 gde prvi broj označava broj redova, a drugi broj označava broj kolona).

Veoma je bitno da znamo da vršimo bazične operacije sa matricama.

1. Sabiranje matrica

Matrice sabiramo tako što svaki element jedne matrice saberemo sa odgovarajućim elementom druge matrice (odgovarajuće znači *sa iste pozicije*). Pogledajmo primer.

➲ **možemo da sabiramo matrice samo kada su istih dimenzija**

Primer.

Saberite sledeće matrice:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = ?$$

Ovo činimo na sledeći način:

$$\begin{bmatrix}2&1&0\\3&2&5\\4&7&8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&2&1\\4&5&8\\2&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+3&1+2&0+1\\3+4&2+5&5+8\\4+2&7+1&8+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&3&1\\7&7&13\\6&8&8\end{bmatrix}$$

2. Oduzimanje matrica

Matrice oduzimamo tako što svaki element jedne matrice oduzmemo sa odgovarajućim elementom druge matrice (odgovarajuće znači *sa iste pozicije*). Pogledajmo primer.

➲ **možemo da oduzimamo matrice samo kada su istih dimenzija**

Primer.
Oduzmite sledeće matrice:

$$\begin{bmatrix}2&1&0\\3&2&5\\4&7&8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&2&1\\4&5&8\\2&1&0\end{bmatrix}=?$$

Ovo činimo na sledeći način:

$$\begin{bmatrix}2&1&0\\3&2&5\\4&7&8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&2&1\\4&5&8\\2&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-3&1-2&0-1\\3-4&2-5&5-8\\4-2&7-1&8-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-3&-3\\2&6&8\end{bmatrix}$$

3. Množenje matrice skalarom

Matrice možemo da pomnožimo odgovarajućim skalarom (konstantom). Skalar množi svaki element matrice kada uđe u matricu.

Primer.
Izračunajte:

$$3\cdot\begin{bmatrix}2&1&0\\3&2&5\\4&7&8\end{bmatrix}=?$$

Ovo činimo na sledeći način:

$$3\cdot\begin{bmatrix}2&1&0\\3&2&5\\4&7&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&3&0\\9&6&15\\12&21&24\end{bmatrix}$$

4. Množenje matrica

Matrice množimo tako što svaki red množimo sa svakom kolonom. Jasnije će biti na detaljnom primeru koji ćemo predstaviti u nastavku, ali prvo da sagledamo neke veoma bitne stvari u vezi množenja matrica:

➲ **Ne možemo uvek pomnožiti dve matrice.** Postoji sledeći uslov da bi množenje dve matrice bilo moguće:

$$\begin{bmatrix}3&2\\1&5\\6&4\end{bmatrix}_{3\times\boxed{2}}\cdot\begin{bmatrix}2&1&5\\3&2&4\end{bmatrix}_{\boxed{2}\times 3}$$

Ovi brojevi (unutrašnji brojevi) moraju biti isti da bismo mogli pomnožiti matrice! Ovde važi da je 2=2, te je množenje ove dve matrice moguće.