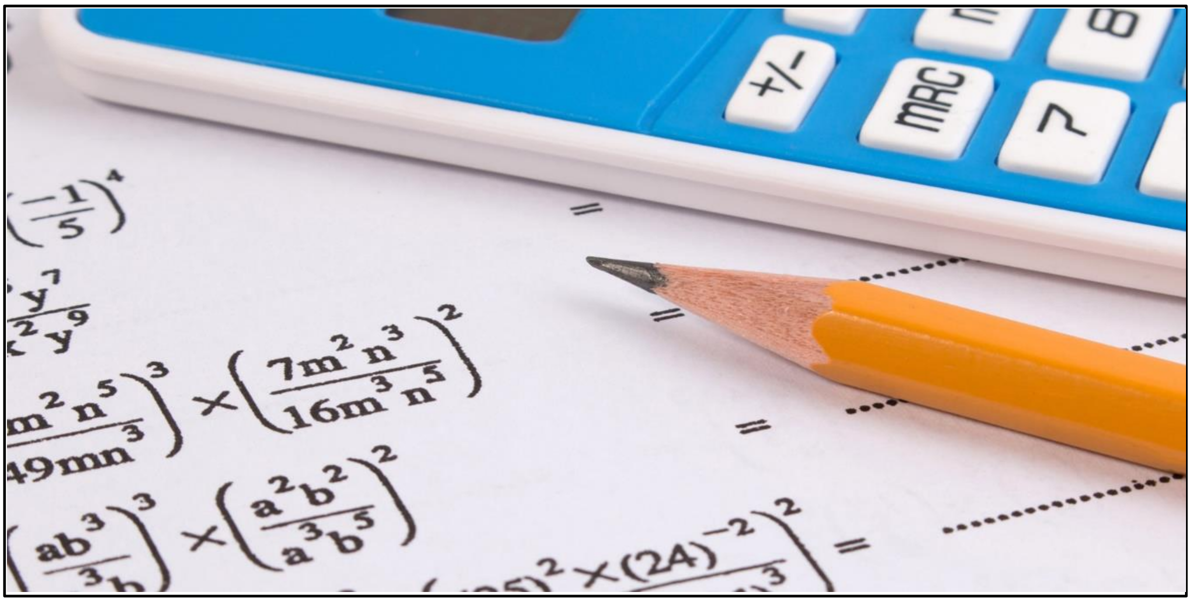
Matematika

Skripta za pismeni deo ispita

Lekcije i rešeni zadaci sa detaljnim objašnjenjima



SKRIPTE EKOF | Spremite ispit - lako i efikasno!

SKRIPTE ZA MATEMATIKU 2020/21

I kolokvijum		II kolokvijum		III kolokvijum		Ispit		
Skripta	Baze	Skripta	Baze	Skripta	Baze	Skripta	Baze	Rokovi
Primeri	Pregledi	Primeri	Pregledi	Primeri	Pregledi	Teorija	Zamenski	

Lekcija 1: Racionalne funkcije

I Ispitivanje funkcija	II Ispitni integrali	III Ostale lekcije

I Ispitivanje funkcija			
1. Racionalne	2. Eksponencijalne	3. Logaritamske	4. Korene

Značaj ove lekcije za ispit

Na pismenom ispitu sigurno dolazi ceo zadatak od 20 poena da ispitamo sve osobine date funkcije (definisanost, nule, znak, parnost, asimptote, ekstremne tačke i monotonost, prevojne tačke i konveksnost, odnosno konkavnost[1]) **i da skiciramo datu funkciju.** Funkcija koja nam je zadata može biti racionalna (lekcija 1), eksponencijalna (lekcija 2), logaritamska (lekcija 3) ili korena (lekcija 4). U ovoj lekciji obrađujemo racionalne funkcije.

Uvod u racionalne funkcije

Racionalne funkcije su funkcije koje ne sadrže nepoznate eksponente, logaritme, korene, niti trigonometrijske funkcije (sinus, kosinus, tangens, kotangens...), već obuhvataju **razlomak koji i u brojiocu i u imeniocu sadrži određeni polinom**. Formalno, racionalna funkcija je oblika:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

gde je $P_n(x)$ polinom stepena n, dok je $Q_m(x)$ polinom stepena m.

Primer jedne racionalne funkcije je sledeća funkcija:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

gde je $P_{n=1}(x) = 2x$ (ovaj polinom je stepena 1 jer je najveći stepen kod x jednak 1), dok je $Q_{m=2}(x) = x^2 - 1$ (ovaj polinom je stepena 2 jer je najveći stepen kod x jednak 2).

Još neki primeri racionalnih funkcija su:

$y = x - \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$, $y = \frac{2x-1}{x^2+1}$, $y = \frac{x^2+4}{x^2-4}$

Ispitivanje osobina racionalnih funkcija

Na pismenom ispitu kod zadatka iz funkcija je potrebno da uradimo **sledećih deset tačaka** (ispitamo devet osobina funkcija i nacrtamo skicu grafika funkcije):

1. Domen funkcije
2. Nule funkcije (nije neophodno ispitati presek sa y-osom, dovoljno je ispitati preske sa x-osom)
3. Znak funkcije
4. Parnost funkcije (nije neophodno uopšte ispitivati ovu tačku – ovo možete ispitivati radi sebe)
5. Asimptote funkcije
6. Ekstremne tačke funkcije
7. Monotonost funkcije

[1] Presek sa x-osom i parnost funkcije na pismenom ispitu nije neophodno ispitati – ne gubite poene ukoliko ovo ne učinite. Ovo možete ipak ispitati ukoliko želite da pokažete da znate i to, a i da bi skica grafika funkcije bila nešto preciznija.

8. Prevojne tačke funkcije
9. Konveksnost, odnosno konkavnost funkcije
10. Skica grafika funkcije

Svih devet osobina smo već detaljno objasnili u okviru prve lekcije iz skripte za treći kolokvijum na standardnim primerima (str.3-20). Desetu tačku nismo obrađivali, jer nije bila potrebna za treći kolokvijum. Ovde ćemo uzeti primer jedne standardne racionalne funkcije i ukratko ponoviti ono što već znamo (tačke 1-9), ali takođe ćemo preći i neke nove stvari – naime, povezaćemo **kako svaka tačka utiče na grafik funkcije, i konačno, skicirati grafik funkcije.**

Standardni primer ispitivanja osobina funkcije

Polazimo od standardnog primera racionalne funkcije i ispitivanja svih 10 potrebnih tačaka za pismeni ispit.

Primer ispitnog zadatka.
(20 poena) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$$

1. Domen funkcije

Prva osobina koju ispitujemo kod funkcija jeste domen funkcije, odnosno za koje vrednosti promenljive x je funkcija definisana u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$. Veoma je bitno da znate **tri osnovna slučaja kada postoji ograničenje za domen funkcije**:

1) Kod razlomaka imenilac ne sme biti nula (npr. za $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ imamo $x - 1 \neq 0$)
2) Kod logaritama ono što se logaritmuje mora biti veće od nule i osnova logaritma mora biti veća od nule i različita od 1 (npr. za $f(x) = \log_x(x+2)$ imamo $x + 2 > 0,\ x > 0,\ x \neq 1$)
3) Kod parnih korena, ono pod korenom mora biti veće ili jednako od nule (npr. za $f(x) = \sqrt[4]{x+3}$ imamo $x + 3 \geq 0$).

U ovom zadatku, funkcija koju ispitujemo je oblika:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$$

Logaritama nemamo, parnih korena nemamo, ali imamo razlomak - njegov imenilac mora biti različit od nule. Ovo zapisujemo na sledeći način:

$$x^2 \neq 0$$

Kada korenujemo i levu i desnu stranu, dobijamo:

$$x^2 \neq 0 \quad /\sqrt{}$$
$$x \neq 0$$

Konačni domen funkcije zapisujemo putem skupa elemenata:

$$Df: x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

NAPOMENA: OZNAKE KOD SKUPOVA
Veoma je bitno da se podsetite osnovnih oznaka za skupove:
- **Presek** skupova se označava sa $\cap$ (npr. ako je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{4, 3, 1\}$, imamo da je $A \cap B = \{1, 3\}$)
- **Unija** skupova se označava sa $\cup$ (npr. ako je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{4, 3, 1\}$, imamo da je $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$)
- **Razlika** skupova se označava sa $\setminus$ (npr. ako je $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{4, 3, 1\}$, imamo da je $A \setminus B = \{2\}$)

NAPOMENA: ZAŠTO „DUPLIRAMO" R?
Standardne skupove brojeva obeležavamo dupliranim slovom (jer to nisu obični skupovi, već se tačno zna šta obuhvataju!). Najčešći standarni skupovi brojeva koje koristimo su:
- **Skup realnih brojeva** – označavamo ga sa $\mathbb{R}$
- **Skup prirodnih brojeva** – označavamo ga sa $\mathbb{N}$
- **Skup kompleksnih brojeva** – označavamo ga sa $\mathbb{C}$

2. Nule funkcije

Druga osobina koju ispitujemo kod funkcija jesu nule funkcije, odnosno ispitujemo preseke funkcije sa x-osom i y-osom. Na koji način ovo činimo?

1) Presek funkcije sa y-osom računamo tako što zamenimo u funkciju da je $x = 0$ (ovo nije neophodno za ispit)
2) Presek funkcije sa x-osom računamo tako što zamenimo u funkciju da je $y = 0$ (**bitna napomena:** prihvatamo samo one vrednosti x koje spadaju u domen funkcije!)

U našem zadatku, izračunajmo prvo <u>presek funkcije sa y-osom</u>, tako što ćemo ubaciti u funkciju da je $x = 0$:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$$
$$f(0) = \frac{0^3 - 1}{0^2} = -\frac{1}{0}$$

Deljenje sa nulom nije definisano, tako da u ovom zadatku nemamo presek funkcije sa y-osom. Ovo ne treba da nas iznenađuje – svakako smo dobili za domen funkcije da x mora biti različito od nule, tako da je besmisleno što smo u ovom zadatku ubacivali da je $x = 0$ (presek sa y-osom možemo da tražimo samo ukoliko $x = 0$ pripada domenu).

Potom, izračunajmo presek funkcije sa x-osom, tako što ćemo ubaciti u funkciju da je $y = 0$:

$$y = \frac{x^3 - 1}{x^2}$$
$$\frac{x^3 - 1}{x^2} = 0$$

Razlomak će biti jednak nuli ukoliko je brojilac jednak nuli:

$$x^3 - 1 = 0$$
$$x^3 = 1 \quad /\sqrt[3]{}$$
$$x = 1$$

Vrednost $x = 1$ pripada domenu funkcije. Shodno tome, tačka preseka sa x-osom je $B(1, 0)$. *Napomena:* Možemo označiti ovu tačku i bilo kojim drugim slovom, oznaka nije toliko relevantna.

Napomena: Obratite pažnju! Da smo imali parni koren umesto kubnog, imali bismo dva rešenja, $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$. Kasnije ćemo videti neke primere kod kojih je ovo slučaj, pa imamo više preseka sa x-osom.

3. Znak funkcije

Treća osobina koju ispitujemo kod funkcija je znak funkcije. Cilj ispitivanja ove osobine je da utvrdimo za koji interval vrednosti x je:

1) $f(x) > 0$, tj. funkcija se nalazi *iznad* x-ose
2) $f(x) < 0$, tj. funkcija se nalazi *ispod* x-ose

Postupak za ispitivanje ove osobine kod racionalnih funkcija svodi se na znanje u vezi nejednačina sa prvog kolokvijuma (crtanje tabele činilaca – str.39 u skripti za prvi kolokvijum). U ovom zadatku imamo:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$$

Brojilac možemo da razložimo putem formule (spisak ovih formula na str.51 u skripti za drugi kolokvijum):

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^2}$$

Sada je potrebno da nacrtamo tabelu, i odvojeno za svaki činilac utvrdimo kada je činilac pozitivan, a kada negativan. Tabelu ćemo ovde odmah nacrtati popunjenu, a u nastavku ćemo objasniti kako smo došli do svakog rezultata:

	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+x+1		$+$		$+$		$+$	
x^2		$+$	$\varnothing$	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$		$-$		$+$	

Prvo određujemo kada je svaki činilac nula. Činilac $x - 1$ je nula ukoliko je:

$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

Kada je činilac $x^2 + x + 1$ nula? Ukoliko bismo pokušali rešiti kvadratnu jednačinu $x^2 + x + 1$, dobijamo sledeće:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Dobili smo negativni broj pod korenom. Ovo znači da ne postoje realna rešenja za x, nego znak a određuje da li je naša funkcija uvek pozitivna ili uvek negativna (a je koeficijent pored x^2). Ovde, a je pozitivno, tako da je funkcija uvek iznad x-ose, odnosno uvek pozitivna. Zaključujemo da činilac ne može biti nula, već je uvek pozitivan.

NAPOMENA: ZNAK DISKRIMINANTE

Diskriminanta kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$ je $D = b^2 - 4ac$.

- **Ukoliko je diskriminanta pozitivna** ($D > 0$), kvadratna funkcija ima dva preseka sa x-osom
- **Ukoliko je diskriminanta nula** ($D = 0$), kvadratna funkcija ima jedan presek sa x-osom (dodiruje je)
- **Ukoliko je diskriminanta negativna** ($D < 0$), kvadratna funkcija nema preseke sa x-osom

KAKO IZGLEDA KVADRATNA FUNKCIJA?

Veoma je važno da se podsetite kako izgleda kvadratna funkcija u različitim slučajevima! **Skenirajte sledeći QR kod preko vašeg pametnog telefona za pristup materijalima.** Neki telefoni mogu ovo da učine direktno preko kamere, ali je najčešće potrebno da preuzmete neku aplikaciju iz Google Play ili Apple Store za skeniranje QR kodova, kao što je „QR code reader“.

Alternativni link
rebrand.ly/matap1

Činilac x^2 je nula kada je:

$$x^2 = 0$$
$$x = 0$$

Stoga, u tabelu ubacujemo ove „ključne" vrednosti kada dolazi do promene znaka činilaca – to su ovde $x = 1$ i $x = 0$. Na krajevima tabele uvek ubacujemo $-\infty$ i $+\infty$.

Znak za činilac $x - 1$: Vrednost ovog izraza je nula u 1, što označavamo malim kružićem u tabeli. Ukoliko je x manje od 1, vrednost izraza je negativna, što označavamo minusom u prvom redu tabele. Ukoliko je x veće od 1, vrednost izraza je pozitivna, što označavamo plusem u prvom redu tabele.

Znak za činilac $x^2 + x + 1$: Ovaj izraz ne može biti nula, pa nema kružića u drugom redu tabele. Već smo utvrdili da ovaj izraz ima negativnu diskriminantu, i znamo da je $a > 0$, tako da je funkcija uvek iznad x-ose, odnosno uvek je pozitivna. Ovo označavamo plusevima u celom drugom redu tabele.

Znak za x^2: Vrednost ovog izraza je nula kada je $x = 0$, što označavamo malim kružićem u trećem redu tabele. Kružić ćemo precrtati, da bismo naznačili da $x = 0$ ne pripada domenu funkcije. Obratite pažnju da bilo koji realan broj (bilo pozitivan, bilo negativan) daje pozitivnu vrednost kada je podignut na kvadrat. Stoga, vrednost ovog izraza je uvek pozitivna, što označavamo plusevima u celom trećem redu tabele.

Znak za celu funkciju $f(x)$: Podsetimo se da neparan broj minusa daje konačni znak minus, a paran broj minusa daje konačni znak plus. Znači: u prvoj koloni dobijamo znak minus, u drugoj koloni dobijamo znak minus i u trećoj koloni dobijamo znak plus.

Na ovaj način popuniti tabelu je u principu dovoljno za ovu tačku kod ispitivanja funkcije na pismenom ispitu. Da biste bili sigurni da ćete dobiti pune poene, rešenje za znak funkcije možete zapisati i u obliku skupa elemenata:

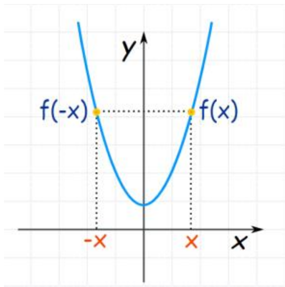
$$f(x) > 0 \ za \ x \in (1, +\infty)$$
$$f(x) < 0 \ za \ x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$$

Napomena! Obratite pažnju da ne napišete samo $(-\infty, 1)$ – ovo je netačno jer nula ne spada u rešenje!

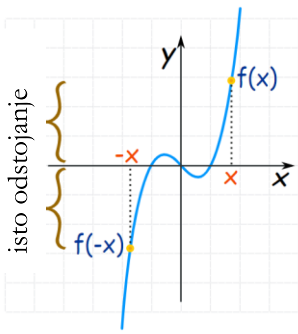
4. Parnost funkcije (ovo nije neophodno ispitivati na ispitu)

Četvrta osobina koju ispitujemo kod funkcija jeste parnost funkcije. U pitanju nije ništa teško – kod parnosti funkcije utvrđujemo da li je funkcija simetrična u odnosu na y-osu ili koordinatni početak. Naime, pravilo je:

1) Ukoliko važi da je $f(-x) = f(x)$, funkcija je **parna**, i ovo znači da je simetrična u odnosu **na y-osu**. Grafički:



2) Ukoliko važi da je $f(-x) = -f(x)$, funkcija je **neparna**, i ovo znači da je simetrična u odnosu na **koordinatni početak**. Grafički:



U našem zadatku, proverimo prvo da li je funkcija parna. Da bi bila parna, mora važiti sledeće:

$$f(x) = f(-x)$$
$$\frac{x^3 - 1}{x^2} = \frac{(-x)^3 - 1}{(-x)^2}$$

Daljim sređivanjem, dobijamo sledeće:

$$\frac{x^3 - 1}{x^2} = \frac{-x^3 - 1}{x^2}$$

Ovo nije tačno. Zaključujemo da funkcija nije parna, tj. da nije simetrična u odnosu na y-osu.

Potom, proverimo da li je funkcija neparna. Da bi bila neparna, mora da važi sledeće:

$$-f(x) = f(-x)$$
$$-\frac{x^3 - 1}{x^2} = \frac{(-x)^3 - 1}{(-x)^2}$$

Daljim sređivanjem, dobijamo:

$$\frac{-x^3 + 1}{x^2} = \frac{-x^3 - 1}{x^2}$$

Ovo nije tačno. Zaključujemo da funkcija nije neparna, te da nije simetrična u odnosu na koordinatni početak.

5. Asimptote funkcije

Peta osobina koju ispitujemo kod funkcija su asimptote funkcije. **Za ispitivanje asimptota potrebno vam je odlično znanje iz limesa, tj. graničnih vrednosti** (skripta za drugi kolokvijum, str.51-64). U okviru ove tačke, ispitujemo da li funkcija ima:

1) vertikalne asimptote
2) horizontalne asimptote
3) kose asimptote

1) Vertikalne asimptote

- Funkcija ima vertikalnu asimptotu *sa desne strane* oblika $x = a$ ukoliko važi:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

Za a uzimamo prekide domena, odnosno vrednosti x koje smo izbacili iz domena. U ovom zadatku, to je $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 - 1}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Zaista, dobijamo ili plus ili minus beskonačno. Stoga, zadata funkcija **ima** vertikalnu asimptotu sa desne strane oblika $x = 0$.

- Funkcija ima vertikalnu asimptotu *sa leve strane* oblika $x = a$ ukoliko važi:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$

Za a uzimamo prekide domena, odnosno vrednosti x koje smo izbacili iz domena. U ovom zadatku, to je $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3-1}{x^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

Zaista, dobijamo ili plus ili minus beskonačno. Stoga, zadata funkcija **ima** vertikalnu asimptotu sa leve strane oblika $x=0$.

Napomena! Kada bi funkcija imala više prekida domena (ovde je to samo 0), onda bismo proveravali da li postoji leva i desna vertikalna asimptota **za svaki prekid pojedinačno**. Primere ćemo raditi kasnije u ovoj skripti.

2) Horizontalne asimptote

- Funkcija ima horizontalnu asimptotu *sa desne strane* oblika $y=b$ ukoliko važi:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$$

gde je b neki konačni broj (nije beskonačno).

U našem zadatku, imamo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}}=+\infty$$

Ne dobijamo konačni broj. Stoga, zadata funkcija **nema** horizontalnu asimptotu sa desne strane. U slučaju da smo dobili konačni broj ovde, imali bismo horizontalnu asimptotu sa desne strane oblika $y=b$.

- Funkcija ima horizontalnu asimptotu *sa leve strane* oblika $y=b$ ukoliko važi:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$$

U našem zadatku, imamo:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}}=-\infty$$

Ne dobijamo konačni broj. Stoga, zadata funkcija **nema** horizontalnu asimptotu sa leve strane. U slučaju da smo dobili konačan broj, imali bismo horizontalnu asimptotu sa leve strane oblika $y=b$.

BITNO! S obzirom da nemamo horizontalne asimptote, ispitujemo kose asimptote. Ukoliko u zadatku dobijete da postoji bar jedna horizontalna asimptota, onda kose asimptote ne ispitujemo!

3) Kose asimptote

- Funkcija ima kosu asimptotu *sa desne strane* oblika $y=kx+n$ ukoliko važi:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+n)]=b$$

pri čemu je:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$
$$n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)$$

U našem zadatku, imamo:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3-1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-1}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x^3}}{1} = 1$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3-1}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3-1-x^3}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

Kada zamenimo vrednosti k i n u izraz, dobijamo:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (kx+n)] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3-1}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3-1-x^3}{x^2}\right) = 0$$

Dobili smo konačan broj. Stoga, zadata funkcija ima kosu asimptotu sa desne strane oblika $y = kx + n$. Kada ovde zamenimo da je vrednost nagiba $k = 1$ i vrednost odsečka $n = 0$, to je kosa asimptota sa desne strane oblika $y = x$.

Napomena! Ukoliko za nagib k dobijemo da je jednak $k = 0$ ili $k = \infty$, odmah možemo da zaključimo da funkcija nema kosu asimptotu. Zašto? Jer se nagib $k = 0$ svodi na horizontalne asimptote koje smo već ispitivali pre kosih asimptota, a $k = \infty$ se svodi na vertikalne asimptote, koje smo takođe već ispitivali pre kosih asimptota.

- Funkcija ima kosu asimptotu *sa leve strane* oblika $y = kx + n$ ukoliko važi:

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (kx+n)] = b$$

pri čemu je:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx)$$

U našem zadatku, imamo:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^3-1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-1}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{1}{x^3}}{1} = 1$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3-1}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3-1-x^3}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

Kada ovo zamenimo u izraz, dobijamo:

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (kx+n)] = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3-1}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3-1-x^3}{x^2}\right) = 0$$

Dobili smo konačan broj. Stoga, zadata funkcija ima kosu asimptotu sa leve strane oblika $y = x$.

6. Ekstremne tačke funkcije

Šesta osobina koju ispitujemo kod funkcija su ekstremne tačke funkcije. **Za ispitivanje ove i narednih osobina potrebno vam je odlično predznanje iz izvoda** (skripta za drugi kolokvijum, str.20-24). Osnovna ideja je veoma jednostavna – potrebno je da izračunamo prvi izvod funkcije $f(x)$ i izjednačimo ga sa nulom. Na ovaj način dobijamo vrednost x za ekstrem funkcije. Potom, potrebno je da zamenimo ovu vrednost x u početnu funkciju $f(x)$ i nađemo njenu vrednost y. Tada zaključujemo da naša funkcija ima ekstremnu tačku $E(x, y)$, gde su x i y vrednosti koje smo opisanim postupkom izračunali.

U ovom zadatku, računamo prvi izvod date funkcije (koristeći pravilo za izvod količnika):

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^3 - 1}{x^2}\right)' = \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3 - 1) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{3x^4 - 2x^4 + 2x}{x^4} = \frac{x^4 + 2x}{x^4}$$

Izjednačimo ovaj izvod sa nulom, kako bismo dobili x koordinatu ekstremne tačke:

$$\frac{x^4 + 2x}{x^4} = 0$$

Ceo razlomak je jednak nuli ukoliko je brojilac jednak nuli:

$$x^4 + 2x = 0$$
$$x(x^3 + 2) = 0$$

Dati izraz je jednak nuli ukoliko je $x = 0$ ili ukoliko je $x^3 + 2 = 0$. Prvi slučaj isključujemo, jer $x = 0$ ne spada u domen funkcije $f(x)$, tako da uzimamo samo drugi slučaj u obzir:

$$x^3 + 2 = 0$$
$$x^3 = -2$$
$$x = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$$

NAPOMENA: „ŠETANJE“ MINUSA KOD NEPARNIH KORENA

- Kod **neparnih** korena, minus može da „šeta“ ispred i unutar korena:

$$\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$$

- Kod parnih korena ovo nikako ne smete da radite!

$$\sqrt{-2} \neq -\sqrt{2}$$

Kada ovu vrednost x ubacimo u funkciju $f(x)$, dobijamo vrednost y koordinate ekstremne tačke:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$$

$$f(-\sqrt[3]{2}) = \frac{(-\sqrt[3]{2})^3 - 1}{(-\sqrt[3]{2})^2} = \frac{-2 - 1}{2^{2/3}} = \frac{-3}{2^{2/3}}$$

Stoga, ekstremna tačka ove funkcije je $E\left(-\sqrt[3]{2}, \frac{-3}{2^{2/3}}\right)$.

Napomena! Nakon što ispitate monotonost funkcije u narednoj tački, ne zaboravite da zaključite za svaki ekstrem da li je po svojoj prirodni lokalni minimum ili maksimum.

7. Monotonost funkcije

Sedma osobina koju ispitujemo kod funkcija je monotonost funkcije. Ispitivanje ove osobine nadovezuje se na ekstremne tačke funkcije. Monotonost funkcije se odnosi na ispitivanje **znaka prvog izvoda funkcije**. Naime:

1) Kada je prvi izvod $f'(x)$ pozitivan, funkcija raste
2) Kada je prvi izvod $f'(x)$ funkcije negativan, funkcija opada

Primenjivaćemo sličan postupak kao u tački 3 u kojoj smo ispitivali znak funkcije $f(x)$. Jedina razlika je što ćemo primeniti postupak na prvi izvod funkcije, odnosno $f'(x)$, a ne na samu funkciju $f(x)$. Kod ispitivanja ekstremnih tačaka funkcije utvrdili smo izraz za prvi izvod funkcije:

$$f'(x) = \frac{x(x^3+2)}{x^4}$$

Sada je potrebno da nacrtamo tabelu, i odvojeno za svaki činilac utvrdimo kada je činilac pozitivan, a kada negativan. Tabelu ćemo ovde odmah nacrtati popunjenu, a u nastavku ćemo objasniti kako smo došli do svakog rezultata:

	$-\infty$	$-\sqrt[3]{2}$	0	$+\infty$
x	$-$	$-$	$\emptyset$	$+$
x^3+2	$-$	0	$+$	$+$
x^4	$+$	$+$	$\emptyset$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$		$+$
$tumačenje$	$f(x)\ raste$	$f(x)\ opada$		$f(x)\ raste$

Prvo određujemo kada su činioci nula. Jasno je da je x jednako nula kada je $x = 0$. Takođe, x^4 je jednako nula kada je $x = 0$. Činilac $x^3 + 2$ je nula kada važi:

$$x^3 + 2 = 0$$
$$x^3 = -2$$
$$x = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$$

Stoga, u tabelu ubacujemo ove „ključne" vrednosti kada dolazi do promene znaka činilaca, a to su ovde $x = -\sqrt[3]{2}$ i $x = 0$.

Znak za x: Vrednost ovog izraza je nula u 0, što označavamo malim kružićem (kružić je precrtan jer je $x = 0$ izbačeno iz domena). Ukoliko je x manje od 0, vrednost izraza je negativna, što označavamo minusom u prvom redu tabele. Ukoliko je x veće od 0, vrednost izraza je pozitivna, što označavamo plusem u prvom redu tabele.
Znak za $x^3 + 2$: Vrednost ovog izraza je nula u $-\sqrt[3]{2}$, što označavamo malim kružićem (kružić nije precrtan jer ova vrednost nije izbačena iz domena funkcije). Ukoliko je x manje od $-\sqrt[3]{2}$ (npr. $x = -2$), dobijamo da je vrednost izraza negativna, što označavamo minusom u drugom redu tabele. Ukoliko je x veće od $-\sqrt[3]{2}$ (npr. $x = 3$), dobijamo da je vrednost izraza pozitivna, što označavamo plusem u drugom redu tabele.
Znak za x^4: Vrednost ovog izraza je nula kada je $x = 0$, što označavamo malim kružićem u trećem redu tabele. Kružić ćemo precrtati, da bismo naznačili da $x = 0$ ne pripada domenu funkcije. Obratite pažnju da bilo koji realan broj (bilo pozitivan, bilo negativan) daje pozitivnu vrednost kada je podignut na parni stepen. Stoga, vrednost ovog izraza je uvek pozitivna, što označavamo plusevima u celom trećem redu tabele.
Znak za $f'(x)$: Podsetimo se da neparan broj minusa daje konačni znak minus, a paran broj minusa daje konačni znak plus. Znači: u prvoj koloni dobijamo znak plus, u drugoj koloni dobijamo znak minus i u trećoj koloni dobijamo znak plus.

Na ovaj način popuniti tabelu je u principu dovoljno za ovu tačku na pismenom ispitu. Da biste bili sigurni da ćete dobiti pune poene, rešenje za monotonost funkcije možete zapisati i u obliku skupa elemenata:

$$funkcija\ raste, tj. f'(x) > 0\ za\ x \in (-\infty, -\sqrt[3]{2}) \cup (0, +\infty)$$
$$funkcija\ opada, tj. f'(x) < 0\ za\ x \in (-\sqrt[3]{2}, 0)$$

Dodatno: Ono što možemo da primetimo jeste funkcija raste do $x = -\sqrt[3]{2}$, a potom opada. Ovo znači da imamo ekstremnu tačku za $x = -\sqrt[3]{2}$, i da je ona **maksimum.** Takođe, primetimo da funkcija potom opada do $x = 0$, a zatim raste. Ovde bismo imali ekstremnu tačku za $x = 0$ – međutim, ova vrednost x je izbačena iz domena tako da ovde nemamo ekstremnu tačku (što se vidi i kada smo ispitivali ekstremne tačke funkcije zasebno).

NAPOMENA: NEKE PRIBLIŽNE VREDNOSTI
U zadacima će ponekad biti korisno da znamo koliko iznose neke često korišćene vrednosti, a koje ne možemo precizno da izračunamo. To su:

$$\sqrt{2} \approx 1{,}41$$
$$\sqrt{3} \approx 1{,}73$$
$$\sqrt{5} \approx 2{,}24$$
$$e \approx 2{,}72$$
$$\pi \approx 3{,}14$$

8. Prevojne tačke funkcije

Osma osobina koju ispitujemo kod funkcija su prevojne tačke funkcije. Prevojne tačke označavaju tačke gde funkcija prelazi iz konveksnosti u konkavnost, i obratno. Osnovna ideja je prosta – potrebno je da izračunamo drugi izvod funkcije $f''(x)$ i izjednačimo ga sa nulom. Na ovaj način dobijamo vrednost x za prevoj funkcije. Potom, potrebno je da zamenimo ovu vrednost x u početnu funkciju i izračunamo njenu vrednost y. Tada zaključujemo da naša funkcija ima prevojnu tačku $P(x, y)$, gde su x i y vrednosti koje smo opisanim postupkom izračunali.

Već smo izračunali prvi izvod u tački 6, kod ispitivanja ekstremnih tačaka funkcije. Drugi izvod funkcije računamo kao izvod prvog izvoda funkcije:

$$f''(x) = (f'(x))'$$
$$f''(x) = \left(\frac{x^4 + 2x}{x^4}\right)' = \frac{(4x^3 + 2) \cdot x^4 - (x^4 + 2x) \cdot 4x^3}{x^8} = \frac{4x^7 + 2x^4 - 4x^7 - 8x^4}{x^8}$$
$$f''(x) = \frac{-6x^4}{x^8} = \frac{-6}{x^4}$$

Izjednačimo ovaj izvod sa nulom, kako bismo dobili x koordinatu prevojne tačke:

$$\frac{-6}{x^4} = 0$$
$$-6 = 0$$

Dobili smo jednakost koja nije moguća. Stoga, zaključujemo da data funkcija **nema prevojnih tačaka.**

Napomena! Naravno, može se desiti da imamo prevojnih tačaka (jednu ili više), i kasnije ćemo preći takve primere. Kod racionalnih funkcija, međutim, neredak je slučaj da ne postoje prevojne tačke funkcije.

9. Konveksnost, odnosno konkavnost funkcije

Deveta osobina koju ispitujemo kod funkcija je konveksnost, odnosno konkavnost funkcije. Ispitivanje ove osobine nadovezuje se na prevojne tačke funkcije. Konveksnost, odnosno konkavnost funkcije se odnosi na ispitivanje znaka drugog izvoda funkcije. Naime:

1) Kada je drugi izvod funkcije $f''(x)$ pozitivan, funkcija je konveksna (oblika je ∪)
2) Kada je drugi izvod funkcije $f''(x)$ negativan, funkcija je konkavna (oblika je ∩)

Primenjivaćemo sličan postupak kao u tački 7 u kojoj smo ispitivali monotonost funkcije. Jedina razlika jeste što ćemo primeniti postupak ne na prvi izvod funkcije $f'(x)$, već na drugi izvod funkcije, odnosno $f''(x)$. Kod ispitivanja prevojnih tačaka funkcije utvrdili smo izraz za drugi izvod funkcije:

$$f''(x) = \frac{-6}{x^4}$$

Sada je potrebno da nacrtamo tabelu, i odvojeno za svaki činilac utvrdimo kada je činilac pozitivan, a kada negativan. Tabelu ćemo ovde odmah nacrtati popunjenu, a u nastavku ćemo objasniti kako smo došli do svakog rezultata:

	$-\infty$	0	$+\infty$
-6	$-$		$-$
x^4	$+$	$\emptyset$	$+$
$f''(x)$	$-$		$-$
tumačenje	$f(x)$ *je konkavna, tj.* $\cap$		

Prvo određujemo kada su činioci nula. Jasno je da -6 nikada nije nula, već je uvek -6 (za bilo koju vrednost x). Takođe, jasno je da je činilac x^4 nula kada je $x = 0$ (crtamo precrtani kružić jer nula ne pripada domenu funkcije). Potom određujemo znakove činilaca – kada su pozitivni, a kada negativni. Činilac -6 je uvek -6, što je uvek negativno, a to označavamo minusima u prvom redu tabele. Činilac x^4 je neki broj dignut na parni stepen, što je uvek pozitivno, pa to označavamo plusevima u drugom redu tabele. Plus i minus daje minus, tako da za znak $f''(x)$ imamo da je uvek negativan.

Na ovaj način popuniti tabelu je u principu dovoljno za ovu tačku na pismenom ispitu. Da biste bili sigurni da ćete dobiti pune poene, rešenje za konveksnost, odnosno konkavnost funkcije možete zapisati i u obliku skupa elemenata:

$$funkcija\ je\ konveksna, tj.\ f''(x) > 0\ za\ x \in \emptyset$$
$$funkcija\ je\ konkavna, tj.\ f''(x) < 0\ za\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

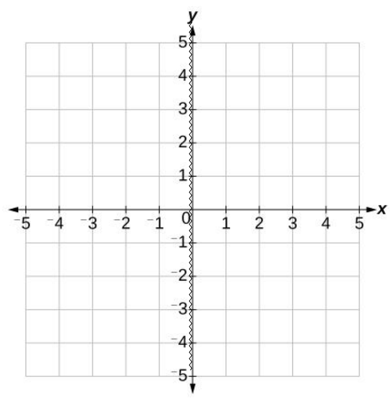
Napomena! Pri ispitivanju tačke 7 (monotonost funkcije) uvek bi trebalo da proverite da li rešenja pripadaju **domenu prvog izvoda.** Pri ispitivanju tačke 9 (konveksnosti i konkavnosti) uvek bi trebalo da proverite da li rešenja pripadaju **domenu prvog i domenu drugog izvoda funkcije.**

10. Grafik funkcije

Ovo je nešto čime se uopšte nismo bavili za treći kolokvijum, pa ćemo ovde to vrlo detaljno proći, korak po korak. U prethodnih 9 tačaka ispitali smo dovoljno o našoj funkciji kako bismo prilično precizno nacrtali skicu grafika funkcije. U nastavku ćemo zaključiti kakvu nam informaciju svaka tačka koju smo ispitali daje u pogledu grafičkog prikazivanja funkcije.

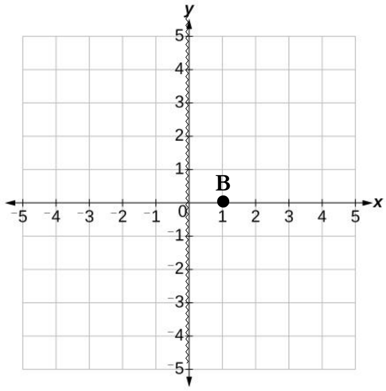
1. Domen funkcije

Utvrdili smo da je domen naše funkcije $Df: x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ovo znači da funkcija ne postoji za $x = 0$, što ćemo označiti talasastom linijom (to je kao prekid ☺) za $x = 0$:



2. Nule funkcije

Utvrdili smo da naša funkcija seče x-osu u tački $B(1,0)$. Imajmo na umu da ova tačka zasigurno pripada našoj funkciji. Označimo je na grafikonu:

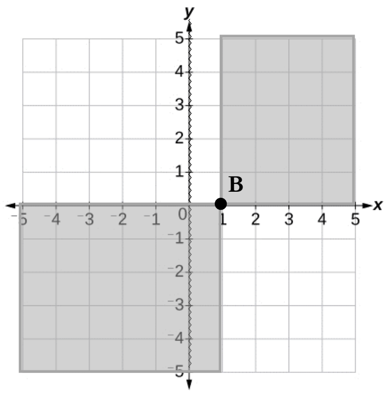


3. Znak funkcije

Za znak funkcije smo utvrdili sledeće:

$$f(x) > 0 \; za \; x \in (1, +\infty)$$
$$f(x) < 0 \; za \; x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$$

Na grafiku možemo blago osenčiti ove površine, kako bismo znali gde se naša funkcija nalazi. Funkcija je negativna (ispod x-ose) za vrednosti x od $-\infty$ do 1 (bez nule). Funkcija je pozitivna (iznad x-ose) za vrednosti x veće od 1:

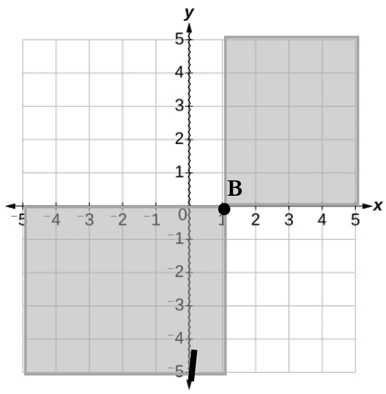


4. Parnost funkcije

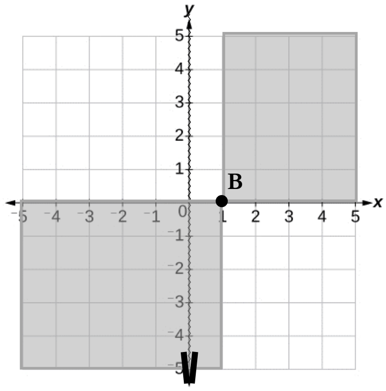
Utvrdili smo da funkcija nije ni parna ni neparna, te nemamo šta dodatno da nacrtamo.

5. Asimptote funkcije

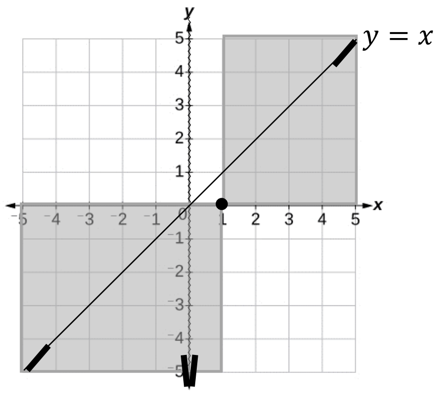
Utvrdili smo da imamo vertikalnu asimptotu sa desne strane oblika $x = 0$. Ovo smo gledali za rub domena $x = 0$, za vrednost 0^+, odnosno utvrdili smo da kada x teži 0^+, vrednost funkcije teži minus beskonačnosti: $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^3 - 1}{x^2} = -\infty$. Ovo obeležavamo kao crticu na grafiku:



Takođe, utvrdili smo da imamo vertikalnu asimptotu sa leve strane oblika $x = 0$. Ovo smo gledali za rub domena $x = 0$, za vrednost 0^-, odnosno utvrdili smo da kada x teži 0^-, vrednost funkcije teži minus beskonačnosti: $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^3-1}{x^2} = -\infty$. Ovo obeležavamo kao crticu na grafiku:

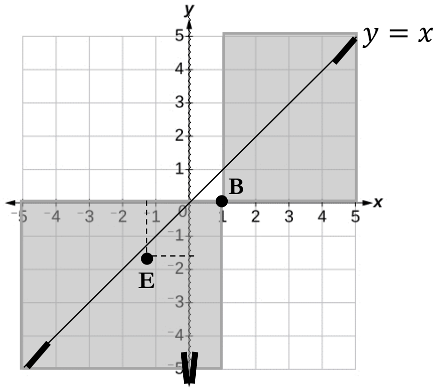


Potom, utvrdili smo da nemamo horizontalnih asimptota. Takođe, utvrdili smo da imamo kosu asimptotu i sa desne strane i sa leve strane oblika $y = x$. Crtamo ovu funkciju na grafikonu:



6/8. Ekstremne tačke i prevojne tačke funkcije

Sledeće što ćemo dodati na grafikon jesu podaci iz tačaka 6 i 8 – ucrtaćemo ekstremne tačke i prevojne tačke na grafikon. U našem zadatku, imali smo ekstremnu tačku $E\left(-\sqrt[3]{2}, -\frac{2}{\sqrt[3]{4}}\right)$. $-\sqrt[3]{2}$ je neki broj između -1 i -2, a $-\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$ je takođe neki broj između -1 i -2. Ucrtajmo ovu tačku na grafikon:



Prevojnih tačaka u ovom zadatku nemamo.

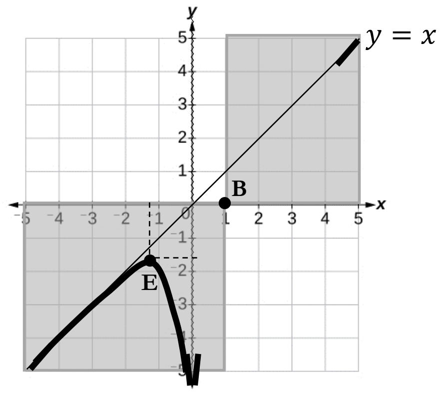
7/9. Monotonost i konveksnost, odnosno konkavnost funkcije

Poslednje što nam treba kako bismo skicirali funkciju jesu podaci iz tačaka 7 i 9 – monotonost i konveksnost, odnosno konkavnost funkcije. Ovde je potrebno da se zaista dobro koncentrišemo, jer ćemo uporedo gledati tabele iz tačke 7 i tačke 9:

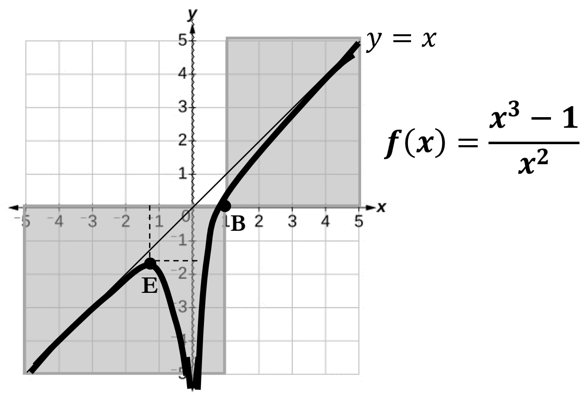
	$(-\infty, -\sqrt[3]{2})$	$-\sqrt[3]{2}$	$(-\sqrt[3]{2}, 0)$	0	$(0, +\infty)$
x	$-$		$-$	$\varnothing$	$+$
x^3+2	$-$	0	$+$		$+$
x^4	$+$		$+$	$\varnothing$	$+$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
tumačenje	$f(x)$ *raste*		$f(x)$ *opada*		$f(x)$ *raste*

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
-6	$-$		$-$
x^4	$+$	$\varnothing$	$+$
$f''(x)$	$-$		$-$
tumačenje	$f(x)$ *je konkavna, tj.* $\cap$		

Ekstrem je tačka gde funkcija prelazi iz rasta u pad, ili iz pada u rast. Kad posmatramo interval za x od minus beskonačnosti do $-\sqrt[3]{2}$, funkcija raste, dostiže maksimum u ekstremnoj tački E, a potom opada sve do $x = 0$. Istovremeno vidimo iz druge tabele da je na ovom intervalu za x (od minus beskonačnosti do nule) funkcija je konkavna, odnosno oblika $\cap$. Sada ovo možemo da ucrtamo na grafikon kao deo naše funkcije:



Potom, znamo da za x veće od nule funkcija raste, da ima presek sa x-osom za $x = 1$, i znamo da je konkavna, tj. $\cap$. Sada ovo možemo da ucrtamo na grafikon kao deo naše funkcije:



I podebljana linija je konačna skica naše funkcije, pa smo završili i finalnu tačku 10! Na ispitu je preporučljivo da (kao i mi ovde) podebljate konačnu funkciju, i označite pored koja je to funkcija.

Fore za zadatke

U prethodnom primeru smo detaljno objasnili osnovni obrazac kako se rešava zadatak ovakvog tipa na pismenom ispitu. Fore u nastavku, kao i lekcije 2, 3 i 4 iz ove skripte posmatrajte kao brojne trikove koje morate provežbati kako biste bili u top formi za ovaj tip zadatka na ispitu i kako se ne biste zbunili.

Kao što ste primetili, najkreativniji deo posla se odnosi na desetu tačku u kojoj crtamo grafik funkcije, jer moramo da detaljno sagledamo svaku prethodno ispitanu osobinu funkcije. Shodno tome, u nastavku ćemo obraditi brojne primere u kojima ćemo za osobine gde je sve standardno napisati znatno manje objašnjenja, a osobine gde se pojavljuje nešto netipično ćemo detaljnije obraditi. U više primera ćemo detaljno opisati i kako se crta grafikon, jer je to deo koji možda i najviše treba provežbati kako biste ga uspešno savladali.

Fora #1: Slučaj kada je funkciju prvo potrebno pretvoriti u razlomak

Ova fora se odnosi na to kada dobijemo izraz koji jeste racionalan, ali ne „skroz", jer nemamo samo jedan razlomak sa polinomima, već i nešto dodatno. **Jedino što ovde treba da uradimo jeste da pre ispitivanja osobina pretvorimo funkciju u jedan razlomak** (koristeći osnovne operacije). Pogledajmo primer.

Primer.
(20 poena) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije:

$$f(x) = x - \frac{1}{x^2}$$

Kao što vidimo, ova funkcija jeste racionalna (nema eksponente, logaritme, korene ili trigonometriju), ali ne obuhvata samo jedan razlomak. Stoga, sprovedimo oduzimanje razlomaka pre nego što krenemo sa ispitivanjem osobina.

$$f(x) = x - \frac{1}{x^2} = \frac{x}{1} - \frac{1}{x^2} = \frac{x \cdot x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^3 - 1}{x^2}$$

Ovim sređivanjem, sveli smo funkciju $f(x)$ na funkciju koju smo ispitivali u prethodnom primeru, te je rešavanje zadatka nakon ovog koraka u potpunosti identično primeru koji smo već uradili.

Fora #2: Slučaj kada funkcija nema ekstremnih tačaka

Kao što smo u prethodnom primeru dobili da funkcija nema prevojnih tačaka, tako se može desiti da funkcija nema ekstremnih tačaka, iako je kod racionalnih funkcija ovo nešto ređi slučaj. Pogledajmo primer.

Primer.
(20 poena) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

Prvo treba da sredimo izraz kako bismo dobili jedan razlomak:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{x - 1 + x + 1}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

Sada možemo da ispitujemo osobine ove funkcije.

1. Domen funkcije

Za domen funkcije imamo da $x^2 - 1 \neq 0$. Odavde sledi da je:

$$x^2 \neq 1$$
$$x \neq 1 \ \ ili \ \ x \neq -1$$

Stoga, domen funkcije je $Df: x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

2. Nule funkcije

Presek sa x-osom dobijamo kada je $y = 0$:

$$\frac{2x}{x^2-1} = 0 \to 2x = 0 \to x = 0$$

Presek sa x-osom je u tački $B(0,0)$.

Presek sa y-osom dobijamo kada je $x = 0$:

$$f(0) = \frac{2 \cdot 0}{0-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

Presek sa y-osom je u tački $A(0,0)$.

3. Znak funkcije

Za znak funkcije $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ pravimo tabelu:

	$-\infty$ do -1	-1 do 0	0 do 1	1 do $+\infty$
$2x$	$-$	$-$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Činilac $2x$ je nula u 0, negativan za x manje od nule, a pozitivan za x veće od nule. Činilac $x^2 - 1$ je kvadratna funkcija oblika $\cup$ (jer je $a > 0$) sa nulama -1 i 1. Znači, između -1 i 1 funkcija je negativna, a ako je x manje od -1 ili veće od 1 onda je funkcija pozitivna (podsetite se izgleda kvadratne funkcije, skripta za I kolokvijum, str.27).

Konačno, znak cele funkcije možemo sumirati na sledeći način:

$$f(x) > 0 \ za \ x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$$
$$f(x) < 0 \ za \ x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$$

4. Parnost funkcije

Funkcija je parna ukoliko važi sledeća jednakost:

$$f(x) = f(-x)$$
$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{-2x}{(-x)^2-1}$$
$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{-2x}{x^2-1}$$

Kao što vidimo, ova jednakost ne važi, te funkcija nije parna. Funkcija je neparna ako važi:

$$-f(x) = f(-x)$$

7. Monotonost funkcije

Tabela za znak prvog izvoda (monotonost) funkcije koji je oblika $f'(x) = (x^2 - 1)e^{x-1}$ izgleda ovako:

	$-\infty$ do -1	-1 do 1	1 do $+\infty$
$x^2 - 1$	$+$	$-$	$+$
e^{x-1}	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
tumačenje	$f(x)$ *raste*	$f(x)$ *opada*	$f(x)$ *raste*

$x^2 - 1$ je kvadratna funkcija koja je nula u -1 i 1, između ovih vrednosti je negativna, a inače je pozitivna (što znamo jer je oblika ∪). e^{x-1} je uvek pozitivno i nikada ne može biti nula. Konačni rezultat zapisujemo i sumirano u zapisu skupa elemenata:

$$funkcija\ raste, tj.\ f'(x) > 0\ za\ x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$
$$funkcija\ opada, tj.\ f'(x) < 0\ za\ x \in (-1, 1)$$

8. Prevojne tačke funkcije

Računamo drugi izvod funkcije $f(x) = (x-1)^2 \cdot e^{x-1}$, tj. izvod od $(x^2 - 1)e^{x-1}$:

$$f''(x) = \left((x^2 - 1)e^{x-1}\right)' = 2xe^{x-1} + (x^2 - 1)e^{x-1} \cdot 1$$

Izvlačimo e^{x-1} ispred zagrade:

$$f''(x) = e^{x-1}[2x + (x^2 - 1)]$$
$$f''(x) = e^{x-1}[x^2 + 2x - 1]$$

Kada ovo izjednačimo sa nulom, dobijamo:

$$e^{x-1}[x^2 + 2x - 1] = 0 \to e^{x-1} = 0\ ili\ x^2 + 2x - 1 = 0$$

Prvi slučaj nikada neće važiti, jer broj e podignut na neki stepen je uvek neki pozitivan broj. Rešavamo drugi slučaj – u pitanju je kvadratna jednačina. Kada rešimo ovu kvadratnu jednačinu, dobijamo rešenja:

$$x_1 = -1 + \sqrt{2}\ \ ili\ \ x_2 = -1 - \sqrt{2}$$

Za prvu vrednost x, y-koordinatu dobijamo tako što zamenimo da je $x = -1 + \sqrt{2}$ u početnu funkciju:

$$f(x) = (x-1)^2 \cdot e^{x-1}$$
$$f\left(-1 + \sqrt{2}\right) = (-1 + \sqrt{2} - 1)^2 \cdot e^{-1+\sqrt{2}-1}$$
$$f\left(-1 + \sqrt{2}\right) = (-2 + \sqrt{2})^2 \cdot e^{-2+\sqrt{2}}$$

Prva prevojna tačka naše funkcije je $P\left(-1 + \sqrt{2}, \left(-2 + \sqrt{2}\right)^2 \cdot e^{-2+\sqrt{2}}\right)$.

Za drugu vrednost x, y-koordinatu dobijamo tako što zamenimo da je $x = -1 - \sqrt{2}$ u početnu funkciju:

$$f(x) = (x-1)^2 \cdot e^{x-1}$$
$$f\left(-1 - \sqrt{2}\right) = (-1 - \sqrt{2} - 1)^2 \cdot e^{-1-\sqrt{2}-1}$$
$$f\left(-1 - \sqrt{2}\right) = (-2 - \sqrt{2})^2 \cdot e^{-2-\sqrt{2}}$$

Druga prevojna tačka naše funkcije je $Q\left(-1 - \sqrt{2}, (-2 - \sqrt{2})^2 \cdot e^{-2-\sqrt{2}}\right)$.

$$-\frac{2x}{x^2-1}=\frac{-2x}{x^2-1}$$
$$\frac{-2x}{x^2-1}=\frac{-2x}{x^2-1}$$

Ova jednakost zaista važi, te funkcija jeste neparna, tj. simetrična u odnosu na koordinatni početak.

5. Asimptote funkcije

Vertikalne asimptote:

Prekidi domena su -1 i 1, te proveravamo da li postoje vertikalne asimptote za ove tačke. Za vertikalnu asimptotu sa desne strane za $x=1$ računamo:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

Znači, naša funkcija **ima** vertikalnu asimptotu sa desne strane oblika $x=1$. Za vertikalnu asimptotu sa leve strane za $x=1$ računamo:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

Znači, naša funkcija **ima** vertikalnu asimptotu sa leve strane oblika $x=1$. Prelazimo na testiranje okoline tačke $x=-1$. Za vertikalnu asimptotu sa desne strane za $x=-1$ računamo:

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{2x}{x^2-1}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$$

OBAVEZNO PONOVITE FORE IZ LIMESA!

Kao što vidite, veoma je važno da odlično baratate limesima za asimptote! Ponovite sve što smo naučili za sada o limesima u okviru gradiva za drugi kolokvijum!

Skenirajte sledeći QR kod preko vašeg pametnog telefona za pristup materijalima. Neki telefoni mogu ovo da učine direktno preko kamere, ali je najčešće potrebno da preuzmete neku aplikaciju iz Google Play ili Apple Store za skeniranje QR kodova, kao što je „QR code reader".

Alternativni link
rebrand.ly/matp2

Znači, naša funkcija **ima** vertikalnu asimptotu sa desne strane oblika $x=-1$. Za vertikalnu asimptotu sa leve strane za $x=-1$ računamo:

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{2x}{x^2-1}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

Znači, naša funkcija **ima** vertikalnu asimptotu sa leve strane oblika $x=-1$.

Horizontalne asimptote:

Za horizontalnu asimptotu sa desne strane računamo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=0$$

Znači, naša funkcija ima horizontalnu asimptotu sa desne strane oblika $y=0$. Za horizontalnu asimptotu sa leve strane računamo:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=0$$

Znači, naša funkcija ima horizontalnu asimptotu sa leve strane oblika $y=0$.

<u>Kose asimptote:</u>
S obzirom da ima bar jednu horizontalnu asimptotu, odmah zaključujemo da naša funkcija nema kose asimptote.

6. Ekstremne tačke funkcije

Računamo prvi izvod funkcije $f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$:

$$f'(x)=\frac{2\cdot(x^2-1)-2x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$$

Kada ovo izjednačimo sa nulom, dobijamo:

$$\frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}=0\rightarrow -2x^2-2=0\rightarrow x^2=-1$$

Ovo je suština fore kod ovog zadatka! Nemoguće je da kada kvadriramo neki realan broj dobijemo negativan broj. Stoga, x u ovom izrazu nema realnih rešenja, te **nemamo ekstremnih tačaka.**

7. Monotonost funkcije

Tabela za znak prvog izvoda (monotonost) funkcije izgleda ovako:

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-2x^2-2$		$-$		$-$		$-$	
$(x^2-1)^2$		$+$	$\emptyset$	$+$	$\emptyset$	$+$	
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$	
$tumačenje$		$f(x)\ opada$		$f(x)\ opada$		$f(x)\ opada$	

$-2x^2-2$ je uvek negativno, jer je x^2 uvek pozitivno. U prethodnoj tački smo dobili da ovaj izraz nikada nije nula. $(x^2-1)^2$ je uvek pozitivno jer je ceo izraz kvadriran, a nula je za $x=-1$ i $x=1$ (što je van domena, pa precrtavamo kružiće). Ovo zapisujemo i sumirano u zapisu skupa elemenata:

$$funkcija\ raste, tj.\ f'(x)>0\ za\ x\in\emptyset$$
$$funkcija\ opada, tj.\ f'(x)<0\ za\ x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$$

8. Prevojne tačke funkcije

Računamo drugi izvod funkcije $f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$, tj. izvod od $\frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$:

$$f''(x)=\left(\frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}\right)'=\frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

Kada ovo izjednačimo sa nulom, dobijamo:

$$\frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=0\rightarrow x=0\ \ ili\ \ (x^2+3)=0$$

$x^2+3=0 \to x^2=-3$. Oovo je nemoguće za realne brojeve, te je jedino rešenje da je $x=0$. Za y koordinatu prevojne tačke ubacujemo da u funkciju da je $x=0$:

$$f(0)=\frac{2\cdot 0}{0-1}=\frac{0}{-1}=0$$

Prevojna tačka naše funkcije je $P(0,0)$.

9. Konveksnost, odnosno konkavnost funkcije

Tabela za znak drugog izvoda (konveksnost i konkavnost) koji je oblika $f''(x)=\frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$ izgleda ovako:

	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$4x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+3		$+$		$+$		$+$		$+$	
$(x^2-1)^3$		$+$	$\varnothing$	$-$		$-$	$\varnothing$	$+$	
$f''(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$tumačenje$		$f(x)\ je\ \cap$		$f(x)\ je\ \cup$		$f(x)\ je\ \cap$		$f(x)\ je\ \cup$	

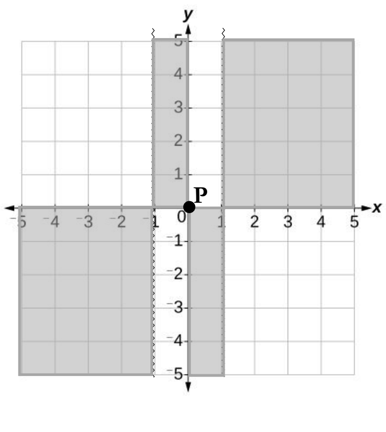
$4x$ je nula u $x=0$, negativno za $x<0$, a pozitivno za $x>0$. Činilac x^2+3 nikada nije nula, a uvek je pozitivan, jer je x^2 uvek pozitivno. Kod činioca $(x^2-1)^3$ **treći stepen ne menja znak izraza pod stepenom (neparni stepeni imaju ovo svojstvo!).** Stoga, ispitujemo znak x^2-1. Ovo je kvadratna funkcija oblika ∪ sa nulama -1 i 1, te između -1 i 1 imamo negativne vrednosti, a van ovog intervala pozitivne vrednosti. Ovo zapisujemo i sumirano u zapisu skupa elemenata:

$$funkcija\ je\ konveksna, tj.\ f''(x)>0\ za\ x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$$
$$funkcija\ je\ konkavna, tj.\ f''(x)<0\ za\ x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$$

10. Grafik funkcije

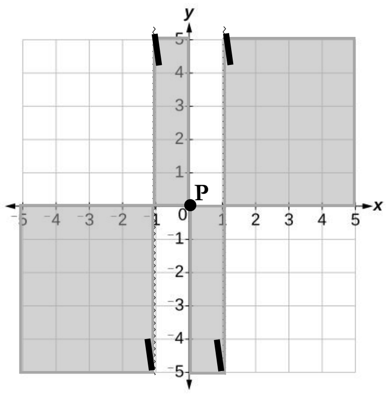
<u>1/2/3/4/6/8. Domen, nule, znak, parnost, ekstremne i prevojne tačke funkcije</u>

Iz domena su izbačene vrednosti $x=-1$ i $x=1$, što označavamo talasastim linijama. Obe nule su u koordinatnom početku (označavamo ovu tačku). Znak funkcije obeležavamo blago osenčenom površinom (tu se naša funkcija nalazi). Za parnost funkcije nećemo ništa označiti, ali imajmo na umu da je funkcija simetrična u odnosu na koordinatni početak, tako da posmatrajući u odnosu na koordinatni početak, leva i desna strana će biti „kao u ogledalu". Ekstremne tačke nemamo, a prevojna tačka P je u koordinatnom početku.

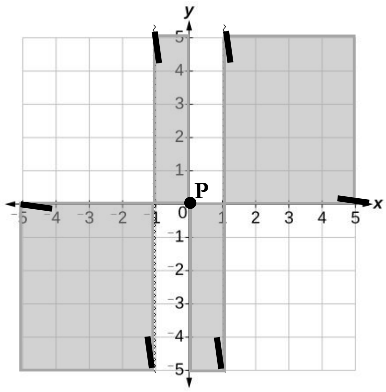


<u>5. Asimptote funkcije</u>

Utvrdili smo da funkcija teži $+\infty$ kada $x\to 1^+$. Ovo je vertikalna asimptota sa desne strane koju obeležavamo na grafikonu. Takođe smo utvrdili da funkcija teži $-\infty$ kada $x\to 1^-$. Obeležavamo i ovo na grafikonu. Takođe, utvrdili smo da funkcija teži $+\infty$ kada $x\to -1^+$, i da funkcija teži $-\infty$ kada $x\to -1^-$, što takođe obeležavamo:

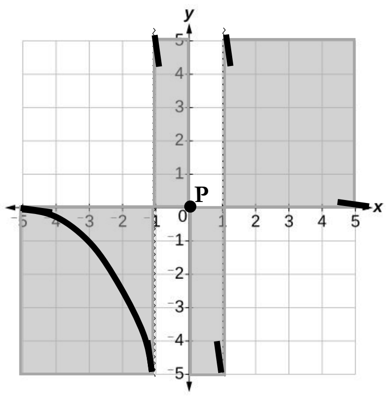


Pored vertikalnih, pronašli smo i da funkcija ima horizontalnu asimptotu sa desne strane $x = 0$ i horizontalnu asimptotu sa leve strane $x = 0$:

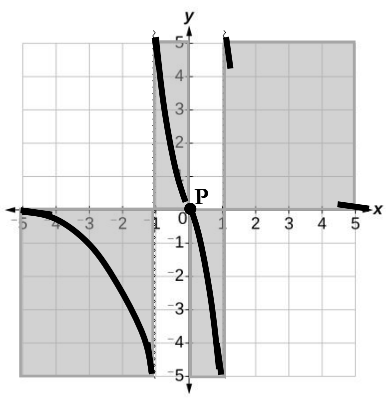


7/9. Monotonost i konveksnost/konkavnost funkcije

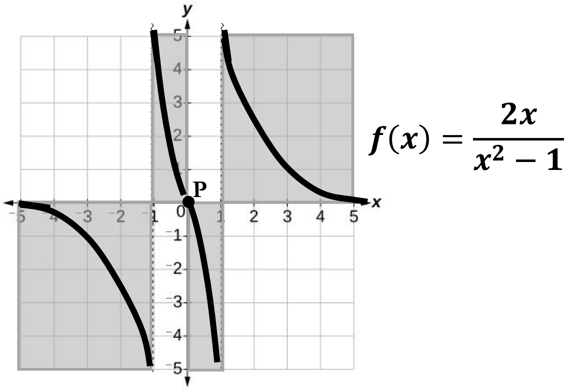
Pogledajte tabele za monotonost i konveksnost/konkavnost funkcije. Utvrdili smo da funkcija uvek opada. Takođe, znamo da za vrednosti x do -1 funkcija jeste konkavna $\cap$, pa crtamo ovaj deo funkcije na grafikonu:



Između $x = -1$ i $x = 1$ funkcija opada, do $x = 0$ je konveksna, a potom u prevoju prelazi u konkavnost. Znači, imamo:



Konačno, za vrednosti x veće od $x = 1$, funkcija opada i konveksna je, pa imamo:



Primeri za vežbanje

Iako smo do sada obradili glavni deo gradiva ove lekcije, kao i brojne trikove i fore koji su česti na pismenom ispitu, pored ovoga potrebno je i da vežbate puno dodatnih zadataka (jer samo čini vežba čini majstora). Shodno tome, u nastavku vam dajemo nekoliko primera za dodatno vežbanje (sa krajnjim rešenjima, za proveru).

Primer za vežbanje (septembar 2016.)
(20 poena) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 1}$$

Rešenje:
1) Domen $Df: x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$
2) Presek sa x-osom $B(-2, 0)$, presek sa y-osom $A(0, 4)$
3) Znak funkcije:

$$f(x) > 0 \; za \; x \in (-1, +\infty)$$
$$f(x) < 0 \; za \; x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1)$$

4) Parnost funkcije: nije parna, nije neparna
5) Asimptote: vertikalna asimptota $x = -1$ sa obe strane, horizontalne asimptote nema, kosa asimptota $y = x + 3$ sa obe strane
6) Ekstremne tačke: $E(-2,0)$ maksimum; $F(0,4)$ minimum

Napomena! Funkcija može da ima više ekstremnih i/ili prevojnih tačaka.

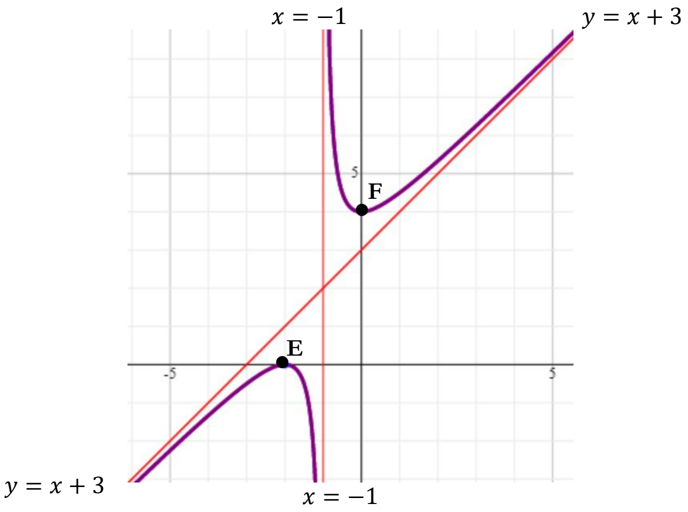
7) Monotonost funkcije:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$$
$$funkcija\; raste, tj.\; f'(x) > 0 \; za \; x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$$
$$funkcija\; opada, tj.\; f'(x) < 0 \; za \; x \in (-2, -1) \cup (-1, 0)$$

8) Prevojne tačke: nema prevojnih tačaka
9) Konveksnost/konkavnost:

$$f''(x) = \frac{2}{(x + 1)^3}$$
$$funkcija\; je\; konveksna, tj.\; f''(x) > 0 \; za \; x \in (-1, +\infty)$$
$$funkcija\; je\; konkavna, tj.\; f''(x) < 0 \; za \; x \in (-\infty, -1)$$

10) Grafik funkcije:



MNOGO DODATNIH PRIMERA ZA VEŽBANJE!

Od velikog je značaja da puno vežbate za pismeni ispit da biste uspešno položili matematiku. **Mnogo dodatnih primera za vežbanje dostupno je u sledećim materijalima:**

1. BAZE za pismeni ispit iz matematike (zadaci po lekcijama)

2. REŠENI ROKOVI za pismeni ispit iz matematike (2018. i 2019. godine)