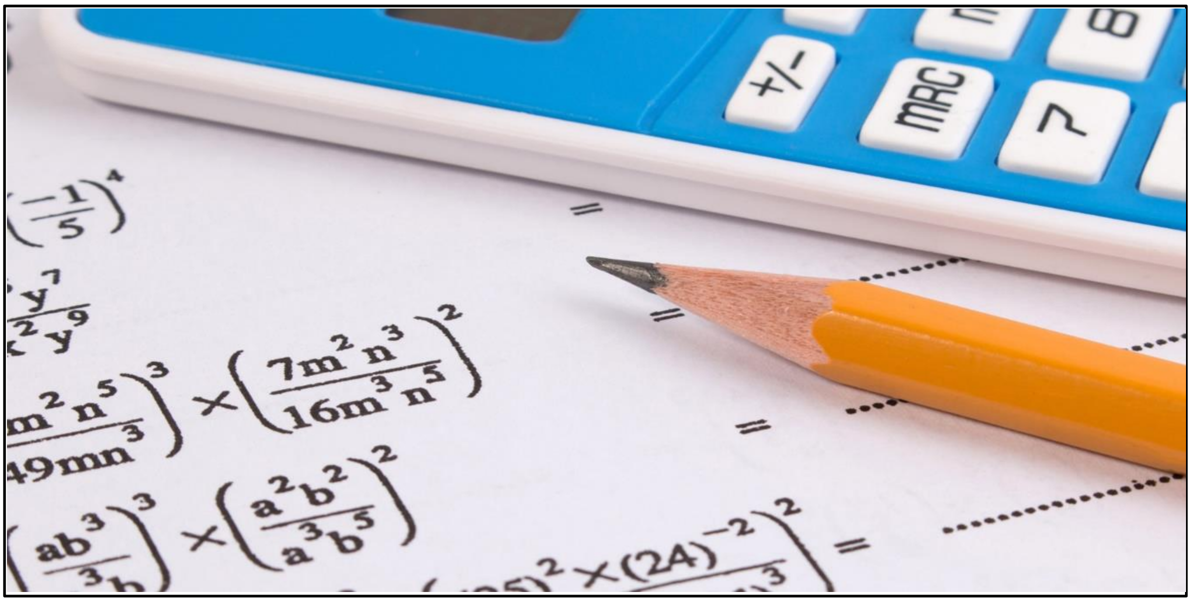
Matematika

Rešeni ispitni rokovi 2018. i 2019.

Rešeni ispitni primeri sa pismenog ispita 2018. i 2019.



SKRIPTE EKOF | Spremite ispit - lako i efikasno!

SKRIPTE ZA MATEMATIKU 2020/21

I kolokvijum		II kolokvijum		III kolokvijum		Ispit		
Skripta	Baze	Skripta	Baze	Skripta	Baze	Skripta	Baze	Rokovi
Primeri	Pregledi	Primeri	Pregledi	Primeri	Pregledi	Teorija	Zamenski	

Univerzitet u Beogradu, Ekonomski fakultet, Beograd — Pismeni ispit iz *Matematike*

Oznaka zadatka: 19/1 Datum: 9.1.2019.

*Ime, prezime i broj dosjea:*________________________

*Potpis (kao u indeksu):*________________________

Z A D A C I :

1. (20 poena) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

2. (20 poena) Izračunati integral:

$$\int \frac{e^{2x}+e^x}{(e^x+2)(e^{2x}+1)}dx$$

3. (20 poena) Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije:

$$z = \frac{x^3}{216} + \frac{y^2}{144} - \frac{xy}{72} - \frac{y}{12}$$

4. (20 poena) Naći opšte rešenje diferencne jednačine: $2y_{t+2} - 7y_{t+1} + 3y_t = 6$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y_0 = 2$ i $2y_1 = -1$, i komentarisati njegovo ponašanje kada se parametar t neograničeno uvećava.

5. (20 poena) Zavisno od vrednosti realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & - & y & - & z & = & 2 \\ x & + & ay & + & 3z & = & -2a \\ 2x & - & 2y & + & 6z & = & 4 \end{array}$$

Želimo Vam uspeh na ispitu!

Grupa 19/1 – rešenja

Zadatak 1

1) Domen $Df: x \in (-\infty, +\infty)$

2) Presek sa x-osom $B(0,0)$, presek sa y-osom $A(0,0)$

3) Znak funkcije:

$$f(x) > 0 \; za \; x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$
$$f(x) < 0 \; za \; x \in \emptyset$$

4) Parnost funkcije: nije parna, jeste neparna

5) Asimptote:

- vertikalne: $nema$ (i sa leve i sa desne strane),
- horizontalne: $nema$
- kose: $y = x$ (sa desne strane), $y = -x$ (sa leve strane)

6) Ekstremne tačke: $E(0,0)$ minimum

7) Monotonost funkcije:

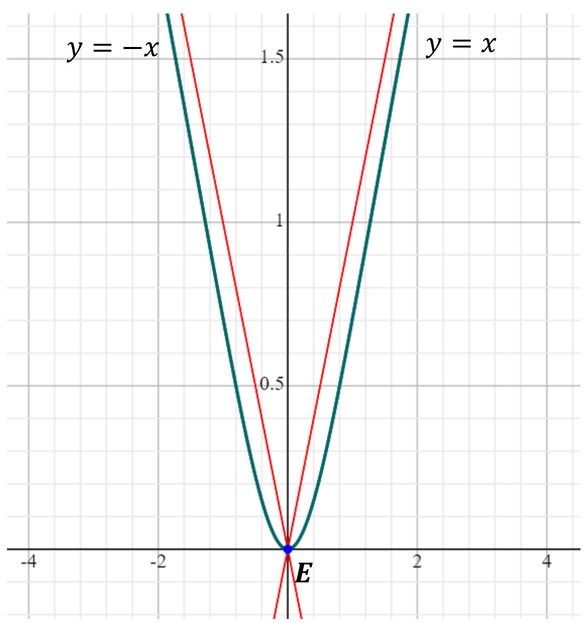
$$f'(x) = \frac{x^3 + 2x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$
$$funkcija\ raste, tj.\ f'(x) > 0 \; za \; x \in (0, +\infty)$$
$$funkcija\ opada, tj.\ f'(x) < 0 \; za \; x \in (-\infty, 0)$$

8) Prevojne tačke: $P\left(-\sqrt{2}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \; Q\left(\sqrt{2}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

9) Konveksnost/konkavnost:

$$f''(x) = \frac{(3x^2+2)(x^2+1)\sqrt{x^2+1} - 3x\sqrt{x^2+1}(x^3+2x)}{\left((x^2+1)\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$
$$funkcija\ je\ konveksna, tj.\ f''(x) > 0 \; za \; x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$
$$funkcija\ je\ konkavna, tj.\ f''^{(x)} < 0 \; za \; x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$$

10) Grafik funkcije:



Zadatak 2

$$= \frac{1}{10} ln|e^{2x} + 1| + \frac{3}{5} arctg(e^x) - \frac{1}{5} ln|e^x + 2| + C$$

Zadatak 3

- Parcijalni izvodi prvog reda:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 - y}{72}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y - x}{72} - \frac{1}{12}$$

- Stacionarne tačke: $M(-2, 4)$, $N(3, 9)$
- Parcijalni izvodi drugog reda:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{x}{36}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{72}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{72}$$

- Lokalni ekstremi: $z_{min}(3, 9) = -\frac{7}{16}$

Zadatak 4

- Rešenje diferencne jednačine:

$$y_t = c_1 2^{-t} + c_2 3^t - 3$$

- Početni uslovi:

$$y_0 = 2 \;\Rightarrow\; c_1 2^{-0} + c_2 3^0 - 3 = 2 \;\Rightarrow\; c_1 + c_2 = 5$$
$$2y_1 = -1 \;\Rightarrow\; 2(c_1 2^{-1} + c_2 3^1 - 3) = -1 \;\Rightarrow\; c_1 + 6c_2 = 5$$

- Rešavanjem sistema dobijamo $c_1 = 5$, $c_2 = 0$, te je partikularno rešenje koje zadovoljava ove uslove:

$$y_t = 52^{-t} + 03^t - 3 = 52^{-t} - 3$$

- Ponašanje ovog rešenja kada se t neograničeno uvećava:

$$\lim_{t \to +\infty} 5 \cdot 2^{-t} - 3 = -3$$

Zadatak 5

- za $a \neq -1$, sistem je saglasan i ima jedinstveno rešenje $(x, y, z) = (0, -2, 0)$
- za $a = -1$, sistem je saglasan i ima beskonačno mnogo rešenja $(x, y, z) = (4\alpha, -2 + 7\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Univerzitet u Beogradu, Ekonomski fakultet, Beograd — Pismeni ispit iz *Matematike*

Oznaka zadatka: 19/2 Datum: 9.1.2019.

*Ime, prezime i broj dosjea:*________________________

*Potpis (kao u indeksu):*________________________

ZADACI:

1. (20 poena) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije:

$$f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$$

2. (20 poena) Izračunati integral:

$$\int \frac{x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx$$

3. (20 poena) Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije:

$$z = xy + \frac{36}{x} + \frac{48}{y}$$

4. (20 poena) Naći opšte rešenje diferencne jednačine: $6y_{t+2} - y_{t+1} - y_t = 8$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y_0 = 1$ i $2y_1 = -1$, i komentarisati njegovo ponašanje kada se parametar t neograničeno uvećava.

5. (20 poena) Rešiti matričnu jednačinu

$$XA = X + A \quad \text{gde je} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Želimo Vam uspeh na ispitu!

Grupa 19/2 – rešenja

Zadatak 1

1) Domen $Df: x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

2) Presek sa x-osom $B(0,0)$, presek sa y-osom $A(0,0)$

3) Znak funkcije:

$$f(x) > 0 \; za \; x \in (0, +\infty)$$
$$f(x) < 0 \; za \; x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$$

4) Parnost funkcije: nije parna, nije neparna

5) Asimptote:

- vertikalne: $x = -1$ (i sa leve i sa desne strane)
- horizontalne: nema
- kose: $y = \frac{x}{2} - 1$ (i sa leve i sa desne strane)

6) Ekstremne tačke: $E\left(-3, -\frac{27}{8}\right)$ maksimum

7) Monotonost funkcije:

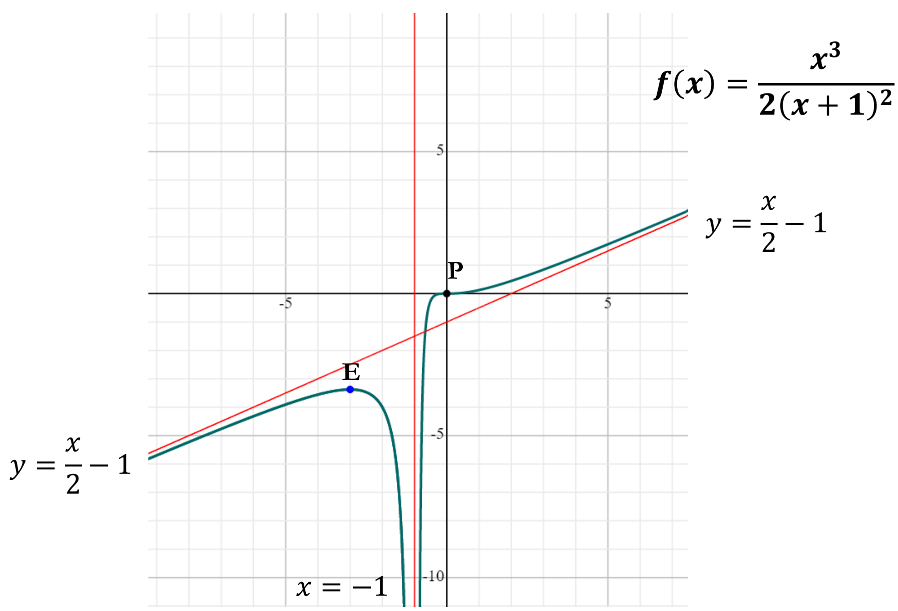
$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$$
$$funkcija\ raste, tj.\ f'(x) > 0 \; za \; x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$$
$$funkcija\ opada, tj.\ f'(x) < 0 \; za \; x \in (-3, -1)$$

8) Prevojne tačke: $P(0, 0)$

9) Konveksnost/konkavnost:

$$f''(x) = \frac{3x}{(x+1)^4}$$
$$funkcija\ je\ konveksna, tj.\ f''(x) > 0 \; za \; x \in (0, +\infty)$$
$$funkcija\ je\ konkavna, tj.\ f''(x) < 0 \; za \; x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$$

10) Grafik funkcije:



Zadatak 2

$$= 6\left(\frac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^4}{4} \cdot \sqrt[6]{x} - arctg\sqrt[6]{x}\right) + C$$

Zadatak 3

- Parcijalni izvodi prvog reda:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{36}{x^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{48}{y^2}$$

- Stacionarne tačke: $M(3,4)$
- Parcijalni izvodi drugog reda:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{72}{x^3}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{96}{y^3}$$

- Lokalni ekstremi: $z_{min}(3,4) = 36$

Zadatak 4

- Rešenje diferencne jednačine:

$$y_t = c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^t + c_2 2^{-t} + 2$$

- Početni uslovi:

$$y_0 = 1 \;\Rightarrow\; c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^0 + c_2 2^{-0} + 2 = 1 \;\Rightarrow\; c_1 + c_2 = -1$$
$$2y_1 = -1 \;\Rightarrow\; 2\left(c_1\left(-\frac{1}{3}\right)^1 + c_2 2^{-1} + 2\right) = -1 \;\Rightarrow\; -2c_1 + 3c_2 = -15$$

- Rešavanjem sistema dobijamo $c_1 = \frac{12}{5},\ c_2 = -\frac{17}{5}$, te je partikularno rešenje koje zadovoljava ove uslove:

$$y_t = \frac{12}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^t - \frac{17}{5} \cdot 2^{-t} + 2$$

- Ponašanje ovog rešenja kada se t neograničeno uvećava:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{12}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^t - \frac{17}{5} \cdot 2^{-t} + 2 = 2$$

Zadatak 5

- Matrična jednačina: $X = A(A-I)^{-1},\ \det(A-I) \neq 0$

Univerzitet u Beogradu, Ekonomski fakultet, Beograd — Pismeni ispit iz *Matematike*

Oznaka zadatka: 19/3 Datum: 9.1.2019.

*Ime, prezime i broj dosjea:*________________________

*Potpis (kao u indeksu):*________________________

ZADACI:

1. (20 poena) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije:

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$$

2. (20 poena) Izračunati integral:

$$\int \frac{x\sqrt[3]{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}}dx$$

3. (20 poena) Odrediti lokalne ekstremne vrednosti funkcije:

$$z = xy + \frac{48}{x} + \frac{36}{y}$$

4. (20 poena) Naći opšte rešenje diferencne jednačine: $2y_{t+2} - 3y_{t+1} - 2y_t = 6$. Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava uslove $y_0 = 0$ i $2y_1 = -1$, i komentarisati njegovo ponašanje kada se parametar t neograničeno uvećava.

5. (20 poena) Zavisno od vrednosti realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & & & = & 0 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ ax & + & 2ay & + & 2z & = & 1 \end{array}$$

Želimo Vam uspeh na ispitu!

Grupa 19/3 – rešenja

Zadatak 1

1) Domen $Df: x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

2) Presek sa x-osom $nema$, presek sa y-osom $nema$

3) Znak funkcije:

$$f(x) > 0 \; za \; x \in (0, +\infty)$$
$$f(x) < 0 \; za \; x \in (-\infty, 0)$$

4) Parnost funkcije: nije parna, nije neparna

5) Asimptote:

- vertikalne: $x = 0$ (i sa leve i sa desne strane),
- horizontalne: $y = 0$ (sa desne strane), $y = -1$ (sa leve strane)
- kose: $nema$

6) Ekstremne tačke: $nema$

7) Monotonost funkcije:

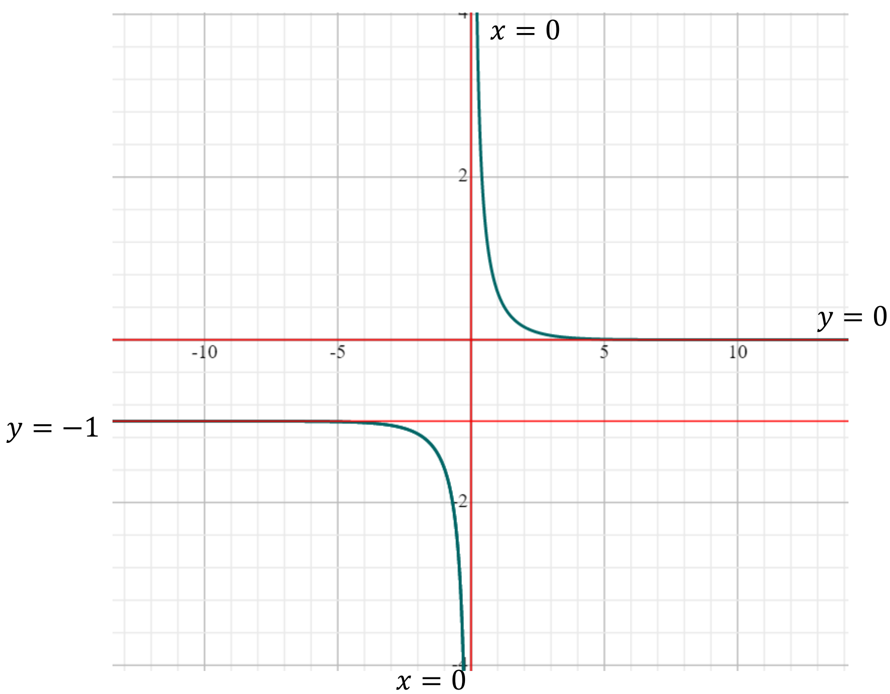
$$f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$$
$$funkcija \; raste, tj. \; f'(x) > 0 \; za \; x \in \emptyset$$
$$funkcija \; opada, tj. \; f'(x) < 0 \; za \; x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

8) Prevojne tačke: $nema$

9) Konveksnost/konkavnost:

$$f''(x) = -\frac{e^x(-e^x - 1)}{(e^x - 1)^3}$$
$$funkcija \; je \; konveksna, tj. \; f''(x) > 0 \; za \; x \in (0, +\infty)$$
$$funkcija \; je \; konkavna, tj. \; f''(x) < 0 \; za \; x \in (-\infty, 0)$$

10) Grafik funkcije:



Zadatak 2

$$= -\frac{1}{4}ln\left|\sqrt[3]{x+2}-1\right| + \frac{5}{8}ln\left|\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^2 + \sqrt[3]{x+2}+2\right| - \frac{3\sqrt{3}}{4}arctg\left(\frac{2\sqrt[3]{x+2}+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Zadatak 3

- Parcijalni izvodi prvog reda:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{48}{x^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{36}{y^2}$$

- Stacionarne tačke: $M(4,3)$
- Parcijalni izvodi drugog reda:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{96}{x^3}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{72}{y^3}$$

- Lokalni ekstremi: $z_{min}(4,3) = 36$

Zadatak 4

- Rešenje diferencne jednačine:

$$y_t = c_1\left(-\frac{1}{2}\right)^t + c_2 2^t - 2$$

- Početni uslovi:

$$y_0 = 0 \;\Rightarrow\; c_1\left(-\frac{1}{2}\right)^0 + c_2 2^0 - 2 = 0 \;\Rightarrow\; c_1 + c_2 = 2$$
$$2y_1 = -1 \;\Rightarrow\; 2\left(c_1\left(-\frac{1}{2}\right)^1 + c_2 2^1 - 2\right) = -1 \;\Rightarrow\; -c_1 + 4c_2 = 3$$

- Rešavanjem sistema dobijamo $c_1 = 1,\; c_2 = 1$, te je partikularno rešenje koje zadovoljava ove uslove:

$$y_t = \left(-\frac{1}{2}\right)^t + 2^t - 2$$

- Ponašanje ovog rešenja kada se t neograničeno uvećava:

$$\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^t + 2^t - 2 = +\infty$$

Zadatak 5

- za $a \neq 1$, sistem je saglasan i ima jedinstveno rešenje $(x,y,z) = \left(0,0,\frac{1}{2}\right)$
- za $a = 1$, sistem je saglasan i ima beskonačno mnogo rešenja $(x,y,z) = \left(-\frac{1}{2}\alpha, \alpha, \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\alpha\right),\; \alpha \in \mathbb{R}$