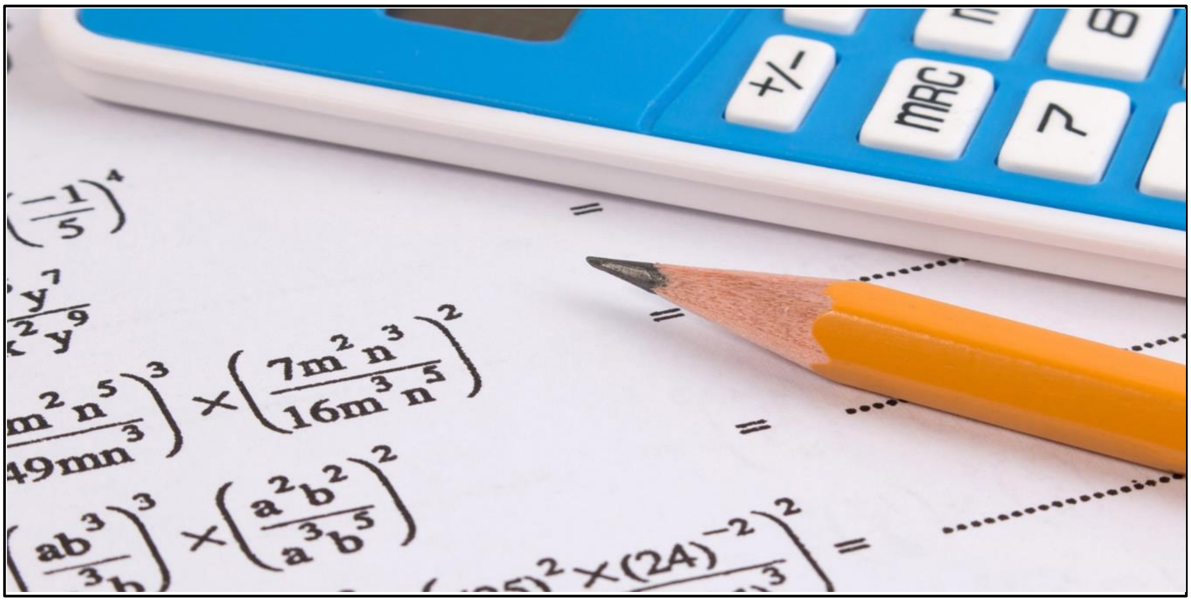
Matematika

Zamenski zadaci za usmeni ispit

Objašnjeni novi tipovi zadataka i rešeni rokovi 2006.-2019.



SKRIPTE EKOF | Spremite ispit - lako i efikasno!

SKRIPTE ZA MATEMATIKU 2020/21

I kolokvijum		II kolokvijum		III kolokvijum		Ispit		
Skripta	Baze	Skripta	Baze	Skripta	Baze	Skripta	Baze	Rokovi
Primeri	Pregledi	Primeri	Pregledi	Primeri	Pregledi	Teorija	Zamenski	

KAKO PROĆI NA USMENOM ISPITU IZ MATE?

~ Detaljno pročitaj i primeni da ne bi pao ispit! ~

1. Odlično vladaj gradivom za pismeni ispit

Ovo podrazumeva da odlično znaš našu skriptu za pismeni ispit! Naročito se fokusiraj da ponoviš:

a) Ekstreme funkcije dve promenljive (str.104-111 u skripti za pismeni ispit)
b) Diferencijalne jednačine (str.122-138 u skripti za pismeni ispit)
c) Ispitne tipove neodređenih integrala (str.75-87 u skripti za pismeni ispit)
d) Sve zadatke iz malih oblasti, osim verovatnoće i relacija (str.139-160 u istoj skripti)

Naravno, i ostale lekcije mogu i javljale su se na usmenom ispitu, tako da ponovi i njih!

2. Savršeno znaj sve zadatke iz malih oblasti

Verovatno si većinu ovih zadataka već prešao za pismeni ispit, jer su i oni u skripti za pismeni! Međutim, sada je ključno da **savršeno znaš SVE te zadatke (svih 14 foldera) – jedino ako ti verovatnoća (folder 1) i relacije (folder 5) ne idu, preskoči ih – za njih je bolje da naučiš teoriju!** Sve zadatke (postavke i rešenja) možeš pronaći na linku: **rebrand.ly/matp10**. Detaljna objašnjenja brojnih glavnih tipova zadataka dostupna su u skripti za pismeni ispit na str.139-160.

3. Detaljno pređi prva dela ove skripte (str.2-30)

Za usmeni ispit je bitno da pređeš i određene **nove tipove zadataka** (**deo 1**), kao i da ponoviš neke **stare tipove zadataka** koji nisu obrađeni u okviru skripte za pismeni ispit (**deo 2**). Detaljno ovo pređi jer su ovo zadaci koji veoma često dolaze na teorijskom delu ispita!

4. Vežbaj puno rokova na pametan način! (str.31-98)

Od ogromnog je značaja da izvežbaš puno ispitnih rokova sa teorijskog dela ispita. U okviru **dela 3** ove skripte dajemo vam postavke brojnih ispitnih rokova za usmeni od 2003. do 2019. godine, kao i rešenja i napomene uz ove zadatke.

Takođe, obavezno vežbaj rokove na <u>PAMETAN NAČIN</u>! Šta ovo znači pročitaj na str.29-30 u ovoj skripti!

Deo 1: Novi tipovi zadataka

I **Novi tipovi zadataka** (nema ih u prethodnim skriptama)	II **Stari tipovi zadataka** (kojih nema u skripti za pismeni ispit)	III **Vežbanje ispitnih rokova** (sa rešenjima i napomenama)

Značaj za ispit

U okviru ovog dela prezentujemo tipove zadataka koje nismo obrađivali u skriptama do sada (skripte za prvi kolokvijum, drugi kolokvijum, treći kolokvijum, pismeni ispit), a koje su relevantne za teorijski deo ispita.

Obrnuti tip diferencijalnih jednačina

U okviru skripte za pismeni ispit na str.122-138 bavili smo se diferencijalnim jednačinama. Jedan tip zadataka koji tamo nismo obradili, a koji je potpuno specifičan za teorijski deo ispita jeste obrnuti tip diferencijalnih jednačina. Naime, zadatak nije da odredimo opšte rešenje date diferencijalne jednačine, već na osnovu opšteg rešenja da postavimo diferencijalnu jednačinu. Za ovo ćemo koristiti sledeću jednostavnu formulu:

$$(r - r_1)(r - r_2) = 0$$

gde r_1 i r_2 dobijamo lako ukoliko znamo opšte oblike homogenih rešenja. Pogledajmo primere.

Primer 1.
Postaviti diferencijalnu jednačinu čije će opšte rešenje glasiti:

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$$

Znamo da je opšte rešenje diferencijalne jednačine oblika:

$$y_h = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

Poređenjem ovih oblika zaključujemo da:

$$r_1 = 3, \; r_2 = 2$$

Sada možemo da primenimo formulu za obrnuti tip diferencijalnih jednačina:

$$(r - r_1)(r - r_2) = 0$$
$$(r - 3)(r - 2) = 0$$
$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

Da bismo dobili postavku diferencijalne jednačine, jedino što preostaje da uradimo jeste da zamenimo da je $r^2 = y''$, $r = y$ i da je $1 = y$ (tj. pored slobodnog člana dodajemo y):

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$
$$r^2 - 5r + 6 \cdot 1 = 0$$
$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

Ovo je krajnje rešenje našeg zadatka!

Primer 2.
Postaviti diferencijalnu jednačinu čije će opšte rešenje glasiti:

$$y(x) = e^{-2x}(C_1 + xC_2)$$

Znamo da je opšte rešenje diferencijalne jednačine oblika:

$$y_h = e^{rx}(c_1 + xc_2)$$

Poređenjem ovih oblika zaključujemo da:

$$r_1 = -2, \;\; r_2 = -2$$

Sada možemo da primenimo formulu za obrnuti tip diferencijalnih jednačina:

$$(r - r_1)(r - r_2) = 0$$
$$(r + 2)(r + 2) = 0$$
$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

Da bismo dobili postavku diferencijalne jednačine, jedino što preostaje da uradimo jeste da zamenimo da je $r^2 = y''$, $r = y$ i da je $1 = y$ (tj. pored slobodnog člana dodajemo y):

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$
$$r^2 + 4r + 4 \cdot 1 = 0$$
$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

Primer 3.
Postaviti diferencijalnu jednačinu čije će opšte rešenje glasiti:

$$y(x) = e^{2x}(C_1 cos2x + C_2 sin2x)$$

Znamo da je opšte rešenje diferencijalne jednačine oblika:

$$y_h = e^{\alpha x}(c_1 cos\beta x + c_2 sin\beta x)$$

Poređenjem ovih oblika zaključujemo da:

$$\alpha = 2, \;\; \beta = 2$$

Takođe, znamo da:

$$r_{1,2} = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$$
$$r_1 = 2 + 2i, \;\;\; r_2 = 2 - 2i$$

Sada možemo da primenimo formulu za obrnuti tip diferencijalnih jednačina:

$$(r - r_1)(r - r_2) = 0$$
$$(r - 2 - 2i)(r - 2 + 2i) = 0$$

Potrebno je da izmnožimo svaki element sa svakim:

$$r^2 - 2r + 2ri - 2r + 4 - 4i - 2ri + 4i - 4i^2 = 0$$

Sređivanjem dobijamo da:

$$r^2 - 4r - 4i^2 = 0$$

FORA! Podsetimo se iz gradiva o kompleksnim brojevima (gradivo srednje škole) da je $i^2 = -1$:

$$r^2 - 4r - 4i^2 = 0$$
$$r^2 - 4r - 4(-1) = 0$$
$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

Da bismo dobili postavku diferencijalne jednačine, jedino što preostaje da uradimo jeste da zamenimo da je $r^2 = y''$, $r = y$ i da je $1 = y$ (tj. pored slobodnog člana dodajemo y):

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$
$$r^2 - 4r + 4 \cdot 1 = 0$$
$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

BITNA NAPOMENA! Postoji jedna fora u vezi partikularnog dela kod ovakvih zadataka! Primer ovakvog zadatka imate u ovoj skripti na str.77 (treći zadatak iz drugog ispitnog roka na ovoj strani).

Promena poretka dvojnog integrala

U okviru skripte za pismeni ispit na str.90-100 bavili smo se dvojnim integralima. Iako tada ukratko jesmo prešli primer iz promene poretka dvojnog integrala, nije na odmet da se podsetimo šta smo naučili i ovde, s obzirom da je ovo veoma bitan tip zadatka za teorijski deo ispita. Dodatnih primera za vežbanje dajemo u okviru lekcije 3 – vežbanje ispitnih rokova.

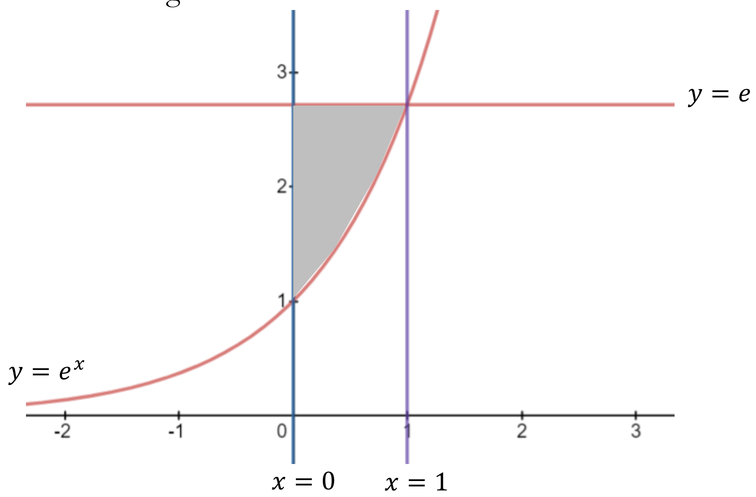
Primer.
Promeniti poredak dvojnog integrala:

$$\int_0^1 dx \int_{e^x}^{e} f(x,y)dy$$

Očigledno je da je trenutni poredak „odozdo“, jer prvo što nam se pojavljuje u integralu jeste dx. Na osnovu ovoga možemo da zaključimo koje su granice, odnosno koje su funkcije koje određuju dvojni integral. Promenljiva y se odnosi na e i na e^x, stoga imamo funkcije:

$$y = e$$
$$y = e^x$$

Takođe, promenljiva x se odnosi na 0 i 1, pa imamo funkcije $x = 0$ i $x = 1$.
Kada nacrtamo ove funkcije, imamo sledeći grafikon:



Sada gledamo sliku i postavljamo dvojni integral „sa strane“. Sa strane, širina integrala je od $y = 1$ do $y = e$, pa imamo granicu:

$$1 < y < e$$

Sa strane, prvo udaramo u $x = 0$, a potom u funkciju $y = e^x$ koju moramo da izrazimo kao $x = f(y)$. Znači:

$$y = e^x \quad /ln$$
$$x = lny$$

Granica je:

$$0 < x < lny$$

Postavljamo dvojni integral, i ovo je konačno rešenje datog zadatka:

$$\int_{1}^{e} dy \int_{0}^{lny} f(x,y)dx$$

Interval monotonosti

U okviru skripte za pismeni ispit na str.1-74 bavili smo se ispitivanjem osobina funkcija, što je naravno podrazumevalo i ispitivanje monotonosti. Na teorijskom delu ispita može vam biti zadato takođe da ispitate monotonost funkcije, ali postoji jedna veoma bitna specifičnost. **FORA! Na teorijskom delu ispita nikako ne pišite uniju, već jednostavno rečima napišite „i“.** Razlog za ovo jeste što vam u zadatku traže koji su intervali monotonosti. Pogledajmo primer.

Primer.
Odrediti intervale monotonosti funkcije:

$$f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$$

FORA! Obavezno prvo odredite domen funkcije:

$$Df:\ x \neq -1$$

Za prvi izvod ćemo dobiti:

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$$

Ispitivanjem monotonosti (kroz ispitivanje znaka prvog izvoda funkcije) dobijamo intervale monotonosti. **Veoma je bitno da rešenje zapišemo na sledeći način na teorijskom delu ispita:**

$$f'(x) > 0\ \ tj.\ funkcija\ raste\ za\ x \in (-\infty, -3)\ \ \boldsymbol{i}\ \ (-1, 0)\ \ \boldsymbol{i}\ \ (0, +\infty)$$
$$f'(x) < 0\ \ tj.\ funkcija\ opada\ za\ x \in (-3, -1)$$

Primetite da smo umesto unije ∪ pisali „i“. Ovo je veoma važno!

Interval konveksnosti

U okviru skripte za pismeni ispit na str.1-74 bavili smo se ispitivanjem osobina funkcija, što je naravno podrazumevalo i ispitivanje konveksnosti. Na teorijskom delu ispita može vam biti zadato takođe da ispitate konveksnost funkcije, ali postoji jedna veoma bitna specifičnost. **FORA! Na teorijskom delu ispita nikako ne pišite uniju, već jednostavno rečima napišite „i“.** Razlog za ovo jeste što vam u zadatku traže koji su intervali konveksnosti. Pogledajmo primer.

Primer.
Odrediti intervale konveksnosti funkcije:

$$f(x) = \ln(x^2 - 8x + 17)$$

FORA! Obavezno prvo odredite domen funkcije:

$$Df:\ x \in (-\infty, +\infty)$$

Za drugi izvod ćemo dobiti:

$$f''(x) = \frac{-2x^2 + 16x - 30}{(x^2 - 8x + 17)^2}$$

Ispitivanjem konveksnosti (kroz ispitivanje znaka drugog izvoda funkcije) dobijamo intervale konveksnosti. **Veoma je bitno da rešenje zapišemo na sledeći način na teorijskom delu ispita:**

$$f''(x) > 0\ \ tj.\ funkcija\ je\ konveksna\ za\ x \in (3, 5)$$
$$f''(x) < 0\ \ tj.\ funkcija\ je\ konkavna\ za\ x \in (-\infty, 3)\ \ \boldsymbol{i}\ \ (5, +\infty)$$

Priraštaj funkcije dva argumenta

U okviru skripte za treći kolokvijum bavili smo se priraštajem funkcije jednog argumenta (ovo ćemo ponoviti kasnije i u okviru ove skripte). Međutim, ponekad se na teorijskom delu ispita javi i zadatak iz priraštaja funkcije *dva* argumenta. Ovo je nešto što do sada nismo obrađivali pa ćemo ovde definisati potrebne formule i preći primer. **Međutim, savetujemo vam da naučite teoriju za priraštaj funkcije dva argumenta, jer je to možda lakše i „unosnije" u pogledu poena na teorijskom delu ispita s obzirom na težinu zadataka ovakvog tipa.**

Potrebno je da znamo kako su definisani parcijalni priraštaji funkcije, kao i totalni priraštaj funkcije. Formule su sledeće.

- Parcijalni priraštaj funkcije po promenljivoj x:

$$\Delta f_x = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

- Parcijalni priraštaj funkcije po promenljivoj y:

$$\Delta f_y = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

- Totalni priraštaj funkcije:

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Pogledajmo primer.

Primer.

Odrediti priraštaje funkcije $f(x, y) = x + 2ye^{x^2 - y^2}$ za priraštaje argumenata Δx i Δy.

Parcijalni priraštaj funkcije po promenljivoj x je dat kao:

$$\Delta f_x = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

Znači, za $f(x + \Delta x, y)$ umesto x pišemo $x + \Delta x$ pa imamo:

$$\Delta f_x = x + \Delta x + 2ye^{(x+\Delta x)^2 - y^2} - \left(x + 2ye^{x^2 - y^2}\right)$$
$$\Delta f_x = x + \Delta x + 2ye^{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - y^2} - x - 2ye^{x^2 - y^2}$$
$$\Delta f_x = \Delta x + 2ye^{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - y^2} - 2ye^{x^2 - y^2}$$

$$\Delta f_x = \Delta x + 2ye^{x^2-y^2}\left(e^{2x\Delta x+(\Delta x)^2} - 1\right)$$
$$\Delta f_x = \Delta x + 2ye^{x^2-y^2}\left(e^{\Delta x(2x+\Delta x)} - 1\right)$$

Parcijalni priraštaj funkcije po promenljivoj y je dat kao:

$$\Delta f_y = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Znači, za $f(x, y + \Delta y)$ umesto y pišemo $y + \Delta y$ pa imamo:

$$\Delta f_y = x + 2(y + \Delta y)e^{x^2-(y+\Delta y)^2} - \left(x + 2ye^{x^2-y^2}\right)$$
$$\Delta f_y = x + 2(y + \Delta y)e^{x^2-y^2-2y\Delta y+(\Delta y)^2} - x - 2ye^{x^2-y^2}$$
$$\Delta f_y = 2(y + \Delta y)e^{x^2-y^2-2y\Delta y+(\Delta y)^2} - 2ye^{x^2-y^2}$$
$$\Delta f_y = e^{x^2-y^2}(2(y + \Delta y)e^{-2y\Delta y+(\Delta y)^2} - 2y)$$
$$\Delta f_y = e^{x^2-y^2}(2(y + \Delta y)e^{\Delta y(-2y+\Delta y)} - 2y)$$

Totalni priraštaj funkcije je dat kao:

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$
$$\Delta f = x + \Delta x + 2(y + \Delta y)e^{(x+\Delta x)^2-(y+\Delta y)^2} - \left(x + 2ye^{x^2-y^2}\right)$$
$$\Delta f = x + \Delta x + 2(y + \Delta y)e^{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-y^2-2y\Delta y-(\Delta y)^2} - x - 2ye^{x^2-y^2}$$
$$\Delta f = \Delta x + 2(y + \Delta y)e^{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-y^2-2y\Delta y-(\Delta y)^2} - 2ye^{x^2-y^2}$$
$$\Delta f = \Delta x + e^{x^2-y^2}(2(y + \Delta y)e^{\Delta x(2x+\Delta x)-\Delta y(2y+\Delta y)} - 2y)$$

Infimum niza

Jedan zadatak koji se nekada javio na teorijskom delu ispita je da odredite koji je infimum određenog niza. Infimum predstavlja najveću minorantu niza, odnosno predstavlja najveću minimalnu vrednost niza. Pogledajmo primer.

Primer.
Odrediti:

$$\inf\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$$

Dato nam je da je n prirodan broj. Izračunajmo vrednost prvih nekoliko članova niza:

- za $n = 1$ imamo $\frac{1}{1} = 1$
- za $n = 2$ imamo $\frac{1}{2} = 0{,}5$
- za $n = 3$ imamo $\frac{1}{3} = 0{,}33$
- za $n = 4$ imamo $\frac{1}{4} = 0{,}25$.

Primećujemo da smo sa donje strane ograničeni nulom. Stoga, zaključujemo da je infimum datog niza nula:

$$\inf\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} = 0$$