# Lekcija 14: Sistemi linearnih jednačina

## Pregled lekcije

U okviru ove lekcije imaćete priliku da naučite sledeće:

- **Gausov metod sa jedinstvenim rešenjem** – kako da rešite Gausovim metodom sistem linearnih jednačina ukoliko postoji jedinstveno rešenje za svaku nepoznatu;
- **Gausov metod bez rešenja** – kako da rešite Gausovim metodom sistem linearnih jednačina ukoliko se dobije određeni kontradiktorni izraz pri rešavanju;
- **Gausov metod sa beskonačno mnogo rešenja** – kako da rešite Gausovim metodom sistem linearnih jednačina koji ima beskonačno mnogo rešenja;
- **kolokvijumske trikove za zadatke iz ove oblasti** – obrađene su i brojne „fore" koje su se javljale na kolokvijumima iz prethodnih godina.

## Sistemi linearnih jednačina sa tri nepoznate

Sistemi linearnih jednačina mogu se rešavati na više načina. Za kolokvijum obrađuje se poznat **Gausov metod** rešavanja sistema linearnih jednačina. Suština ovog metoda jeste da manipulišete sistem tako što množite jednačine određenim koeficijentima (brojevima) i dodajete ih drugim jednačinama, tako da se izgube određene nepoznate, te da biste došli do rešenja za jednu nepoznatu. Potom se vraćate unazad kako biste utvrdili vrednosti ostalih promenljivih.

Postoje **tri odvojena slučaja**. Objasnićemo ovo detaljno na standardnom primeru, za sva tri slučaja pojedinačno.

### Slučaj 1: Postoji jedinstveno rešenje za svaku nepoznatu

**Primer.** (izvor: profesorka.wordpress.com)

Gausovim metodom rešavamo sledeći sistem:

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 20 \\ -3x + 4y + 2z &= -7 \\ -x + 2y + z &= -2 \end{aligned}$$

Prvo ćemo proučiti koeficijente uz x: imamo 1, -3 i -1. Da bi koeficijent u prvoj jednačini (1) bio suprotan koeficijentu u drugoj (-3), treba da ga pomnožimo sa 3. Za treću jednačinu ne moramo ništa da radimo, jer su koeficijenti već suprotni.

Dakle, da bi neutralisali x iz druge i treće jednačine, prvo ćemo prvu pomnožiti sa 3 i dodati drugoj, a zatim prvu bez množenja dodati trećoj:

$$\begin{aligned} x-y+3z&=20 \quad / \cdot 3 \;\; / \\ -3x+4y+2z&=-7 \\ \underline{-x+2y+z}&\underline{=-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-y+3z&=20 \\ y+11z&=53 \\ y+4z&=18 \end{aligned}$$

Dobili smo jednu jednačinu sa tri nepoznate i dve jednačine sa po dve nepoznate. Sada ponavljamo postupak za drugu i treću jednačinu, da bi eliminisali y iz treće:

$$\begin{aligned} x-y+3z&=20 \\ y+11z&=53 \quad / \cdot (-1) \\ \underline{y+4z}&\underline{=18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-y+3z&=20 \\ y+11z&=53 \\ -7z&=-35 \end{aligned}$$

Odavde, radom „unazad" računamo z, zamenom dobijamo y i na kraju x:

$$\begin{gathered} -7z=-35 \Rightarrow z=5 \\ y+11 \cdot 5=53 \Rightarrow y=53-55=-2 \\ x-(-2)+3 \cdot 5=20 \Rightarrow x=20-2-15=3 \end{gathered}$$

Dakle, rešenje je $(x,y,z)=(3,-2,5)$. Ne zaboravite da proverite da li ste dobro uradili zadatak, tako što ćete zameniti rešenja za nepoznate u početni sistem i proveriti da li dobijate tačne jednakosti:

$$\begin{gathered} 3-(-2)+3 \cdot 5=3+2+15=20 \\ -3 \cdot 3+4 \cdot (-2)+2 \cdot 5=-9-8+10=-7 \\ -3+2 \cdot (-2)+5=-3-4+5=-2 \end{gathered}$$

***NAPOMENA: ZAPIS REŠENJA NA KOLOKVIJUMU I ISPITU***

Veoma je bitno da kod sistema linearnih jednačina ne ostavite rešenje kao x=..., y=..., z=... . Na kolokvijumu i ispitu insistiraju da rešenje sistema linearnih jednačina zapišete u obliku **uređenog para**:

$$(x,y,z)=(rešenje\ za\ x, rešenje\ za\ y, rešenje\ za\ z)$$

Razlog zašto na ovome insistiraju jeste što zapis x=..., y=..., z=... ukazuje na to kao da su ova rešenja odvojena rešenja (što je npr. slučaj kod kvadratne jednačine sa dva različita rešenja – x1 i x2). Međutim, ovde je to pogrešno – jedno rešenje sistema linearnih jednačina predstavlja uređen par nepoznatih x, y, z (naravno, mogu zadati i neka druga „slova" umesto ovih klasičnih).

## Slučaj 2: Nema rešenja

**Primer** (izvor: profesorka.wordpress.com)

Gausovim metodom rešavamo sledeći sistem:

$$\begin{aligned} x+y+z&=5\\ 5x+5y+5z&=20\\ 2x+3y-z&=8 \end{aligned}$$

Primenjujemo identičan postupak kao u prethodnom primeru:

$$\begin{aligned} x+y+z&=5 \quad /\cdot(-5) \ \hookleftarrow + \\ 5x+5y+5z&=20\\ \underline{2x+3y-z}&\underline{=8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+z&=5\\ 0&=-5 \end{aligned}$$

Ono što je ovde specijalno jeste da dobijamo **netačan izraz** – nula nije jednaka -5! **Stoga zaključujemo da naš sistem nema rešenja. Zapis ovog rešenja je:**

$$(x,y,z)\in\emptyset$$

***NAPOMENA: ZAPIS REŠENJA KADA NEMA REŠENJA***

Na kolokvijumu i ispitu insistiraju da, ukoliko zaključite da sistem linearnih jednačina nema rešenja, zapišete to u obliku

$$(x,y,z)\in\emptyset$$

gde $\in\emptyset$ znači „pripada praznom skupu".

**Nikako nemojte zapisati rešenje sa jednako, jer ovo ne priznaju! Pišite znak „pripada":**

$$(x,y,z)=\emptyset \quad ✗$$
$$(x,y,z)\in\emptyset \quad ✓$$

## Slučaj 3: Beskonačno mnogo rešenja

**Primer** (izvor: profesorka.wordpress.com)

Gausovim metodom rešavamo sledeći sistem:

$$\begin{aligned} x+y+z&=3\\ x+y-z&=3\\ 2x+2y+z&=6 \end{aligned}$$

Primenjujemo identičan postupak kao u prvom primeru:

$$\begin{aligned}
x+y+z&=3 \quad / \cdot (-1) \quad / \cdot (-2)\\
x+y-z&=3\\
\underline{2x+2y+z}&\underline{=6}\\
x+y+z&=3\\
-2z&=0\\
\underline{z}&\underline{=0}\\
z&=0\\
0&=0\\
x+y+0=3 &\Rightarrow x=3-y
\end{aligned}$$

Ono što je ovde specifično jeste da dobijamo **više nepoznatih nego što imamo jednačina** (imamo tri nepoznate, a dve jednačine). Pritom, nismo dobili netačan izraz. **Stoga, znamo da naš sistem jednačina ima beskonačno mnogo rešenja, odnosno da imamo jedan opšti parametar** (pogledajte uokvirenu napomenu ispod).

Potrebno je da izrazimo ova rešenja. Dobili smo da je $z = 0$, tako da to jeste jedina vrednost koju $z$ može da uzme. Međutim, za x i y samo znamo da njihovu vezu: $x = 3 - y$. Jedna promenljiva od ove dve može da uzme bilo koju vrednost iz skupa realnih brojeva, a druga će da zavisi od nje. Na primer, uzmimo da x može da uzme bilo koju vrednost $\alpha \in \mathbb{R}$ (alfa iz skupa realnih brojeva). Tada, izrazimo y:

$$x = 3 - y$$
$$\alpha = 3 - y$$
$$\boldsymbol{y = 3 - \alpha}$$

Konačno rešenje je dakle:

$$(x, y, z) = (\alpha, 3 - \alpha, 0), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Naravno, mogli ste da uzmete i da je $y = \alpha$, pa da izrazite x preko ovoga. Rešenje bi izgledalo drugačije, ali i dalje je u potpunosti validno i bilo bi priznato na kolokvijumu i ispitu (zato nemojte da paničite ukoliko upoređujete rešenja sa kolegama posle kolokvijuma za ovaj zadatak i imate drugačija rešenja!).

***NAPOMENA: BROJ NEPOZNATIH – BROJ JEDNAČINA = BROJ PARAMETARA***

Da se ne biste zbunili, korisno je da znate da:

➔ ukoliko imate **isti** broj nepoznatih i broj jednačina u sistemu, onda imate nula parametara u rešenjima, odnosno imate jedinstveno rešenje sistema;

➔ ukoliko imate **različit** broj nepoznatih i broj jednačina u sistemu, onda imate neki parametar ili parametre koji su vam potrebni za rešenje, i to gledate po formuli:

$$broj\ nepoznatih - broj\ jednačina = broj\ parametara$$

➲ Za parametar uzimate neko grčko slovo - najčešće to su $\alpha$ (alfa), $\beta$ (beta) i $\gamma$ (gama).

➲ Obavezno definišite svaki parametar nakon rešenja u vidu uređenog para:

$$(x, y, z) = (\alpha, 3 - \alpha, 0), \quad \boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$$

## Fore za zadatke

Pored osnovnih pravila, potrebno je da imate „keca u rukavu“ za rešavanje zadatka ukoliko primetite da ne možete dobiti rešenje standardnim postupcima. Ovde ćemo prezentovati nekoliko „fora“ koje su se javljale na prethodnim kolokvijumima i kako ih upotrebiti.

### Fora #1: Zbunjujući sistem

Očekivali biste da imate tri jednačine sa tri nepoznate, pa da onda tu nešto radite. Međutim, ponekad zadatak izgleda „čudno“ i „zbunjujuće“, ali je zapravo vrlo jednostavan. Pogledajmo primer.

**Primer.**
Rešiti sledeći sistem jednačina Gausovim metodom:

$$x - z = 1$$
$$y = 10$$

Suštinski, stvar je vrlo prosta – samo poredite koliko imate jednačina i koliko imate nepoznatih, pa ćete znati šta da radite. Imamo tri nepoznate (x, y, z), a imamo dve jednačine. Stoga, potrebno je sigurno da uvedemo jedan parametar $\alpha \in \mathbb{R}$ (alfa iz skupa realnih brojeva). Dato nam je već da je $y = 10$, tako da ovo ne diramo. Uzmimo npr. da je $x = \alpha \in \mathbb{R}$ . Izrazimo nepoznatu $z$:

$$x - z = 1$$
$$z = x - 1$$
$$z = \alpha - 1$$

Konačno rešenje zapisujemo u obliku:

$$(x, y, z) = (\alpha, 10, \alpha - 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

### Fora #2: Izmešani članovi

Očekivali biste da imate tri jednačine sa tri nepoznate, i to da u jednačini uvek prvo imate x, pa y, pa z, a sa desne strane da bude vrednost. Međutim, imajte na umu da mogu da vam izmešaju ove članove. Isto tako, mogu i da daju neka druga slova umesto x, y, z (nemojte da vas ovo zbuni, postupak rešavanja je identičan!). Ono što je potrebno da učinite jeste samo da složite članove u standardni redosled, kada imate izmešane članove.

**Primer.**
Rešiti sledeći sistem jednačina Gausovim metodom:

$$-3z - 3x + 3y = 6$$
$$22x - 22y + 22z = -44$$
$$-12y + 12z + 12x = -24$$

Ne dajte se zbuniti, potrebno je samo da složimo x, y, z tim redosledom:

$$-3x + 3y - 3z = 6$$
$$22x - 22y + 22z = -44$$
$$12x - 12y + 12z = -24$$

Sada možete standardnim postupkom nastaviti rešavanje sistema. Rešenje koje treba da dobijete jeste:

$$(x, y, z) = (\beta - \alpha - 2, \beta, \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$$

## Fora #3: „Rupe"

Očekivali biste da imate tri jednačine sa tri nepoznate, i to da u jednačini uvek prvo imate x, pa y, pa z. Međutim, nekad mogu da vam daju takav zadatak da izostave neku od promenljivih u svakoj ili nekoj jednačini. Uglavnom, izlaz iz ovakve situacije jeste da baratate sa dve jednačine istovremeno, a ne tri kao u standardnom postupku. Pogledajmo sledeći primer.

**Primer.**

Rešiti sledeći sistem jednačina Gausovim metodom:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 11y & + & 11z & = & 11 \\ 11x & & & + & 11z & = & 22 \\ 11x & + & 11y & & & = & 33 \end{array}$$

Prvo, sve jednačine možemo da podelimo sa 11, da bismo lakše radili sa brojevima:

$$\begin{array}{ccccccc} & & y & + & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 2 \\ x & + & y & & & = & 3 \end{array}$$

Sada, pomnožimo prvu jednačinu sa -1 i dodajmo drugoj (treću jednačinu ne diramo!):

$$\begin{array}{ccccccc} & & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & & & = & 1 \\ x & + & y & & & = & 3 \end{array}$$

Potom, dodajmo drugu jednačinu trećoj jednačini (prvu jednačinu ne diramo!):

$$\begin{array}{ccccccc} & & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & & & = & 1 \\ 2x & & & & & = & 4 \end{array}$$

Iz poslednje jednačine dobijamo da je $x = 2$. Kada ovo ubacimo u drugu jednačinu, dobijamo da je $y = 1$, a kada ovo ubacimo u prvu jednačinu dobijamo da je $z = 0$. Konačno rešenje je:

$$(x, y, z) = (2,1,0)$$

## Fora #4: Sistem gde nisu samo brojevi i nepoznate u jednačinama

Očekivali biste da imate tri jednačine sa tri nepoznate, i to da u jednačini uvek prvo imate x, pa y, pa z, i da uz svaku stoji određeni broj, kao i da je svaka jednaka određenom broju. Ovo je naravno validno, ali ponekad žele da vas zbune tako što ovi brojevi nisu odmah očigledni, već žele da provere da li ste zaboravili osnovno gradivo iz eksponencijalne funkcije, logaritamske funkcije, trigonometrijskih funkcija... (lekcije 1-13). **Obavezno uvek imajte ovo znanje na umu, ne smete zaboraviti ono što ste učili u lekcijama 1-13!** Pogledajmo sledeći primer.

**Primer.**
Rešiti sledeći sistem jednačina Gausovim metodom:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & lne^{2z} & = & 3 \\ & & y & & & = & 3\sin(\pi/2) \end{array}$$

Jedino što je neobično u ovom sistemu jesu $lne^{2z}$ i $3\sin(\pi/2)$. Podsetimo se gradiva za lekcije 1-13:

→ $ln$ je prirodni logaritam (logaritam sa osnovom e). Stepen koji je pod logaritmom može da izađe ispred logaritma. Stoga, imamo da je:

$$lne^{2z} = 2z \cdot \log_e e = 2z$$

→ $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ je lako izračunati ukoliko poznajemo trigonometrijski krug. $\frac{\pi}{2}$ zapravo predstavlja ugao od 90 stepeni, a sinus je jednak vrednosti sa vertikalne ose. Stoga, vrednost ovog sinusa je 1 (jer je sinusna funkcija definisana za vrednosti funkcije između -1 i 1).

Naš sistem jednačina postaje:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & 2z & = & 3 \\ & & y & & & = & 3 \end{array}$$

Ovo je sada sistem koji rešavamo poznatim metodama. Konačno rešenje koje treba da dobijete jeste:

$$(x, y, z) = (2\alpha, 3, \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

# Dodatni zadaci za vežbanje

Prethodno smo prešli nekoliko primera rešenih kolokvijumskih zadataka. Mnogo više kolokvijumskih zadataka za vežbanje dostupno je na Skripte Ekof onlajn kursu za kolokvijum iz Matematike (skripteekof.com/matematika-kursevi), kao i dodatna objašnjenja, podrška za sva pitanja i dr.

# Lekcija 15: Matrice i determinante

## Pregled lekcije

U okviru ove lekcije imaćete priliku da naučite sledeće:

- **osnovne osobine matrica** – šta predstavljaju i kako izgledaju;
- **osnovne operacije sa matricama** – sabiranje, oduzimanje, množenje skalarom i međusobno množenje matrica;
- **važne matrice** – šta predstavlja jedinična, transponovana, adjungovana i inverzna matrica, koji je njihov značaj i kako ih dobijamo;
- **regularna i singularna matrica** – šta predstavljaju, u čemu je razlika i zbog čega je ovo važno;
- **algebarski kofaktor i bazisni minor** – šta predstavljaju i kako se dobijaju;
- **matrične jednačine** – postupak rešavanja standardne matrične jednačine;
- **rang matrice** – postupak za određivanje ranga matrice, za slučaj bez parametra i sa parametrom.

## Osnovne osobine i operacije sa matricama

Matrica je skup elemenata koji su poređani u redove i kolone. U matematičkom smislu matricu A zapisujemo na sledeći način:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Elementi matrice su $a_{11}$ ... $a_{33}$, gde prvi broj u indeksu označava redni broj reda, a drugi broj u indeksu označava redni broj kolone. Ovo je matrica koja ima tri reda i tri kolone (ovo opciono možemo zapisati u indeksu na celu matricu kao $3 \times 3$ gde prvi broj označava broj redova, a drugi broj označava broj kolona).

Veoma je bitno da znamo da vršimo bazične operacije sa matricama.

### 1. Sabiranje matrica

Matrice sabiramo tako što svaki element jedne matrice saberemo sa odgovarajućim elementom druge matrice (odgovarajuće znači *sa iste pozicije*). Pogledajmo primer.

➲ **možemo da sabiramo matrice samo kada su istih dimenzija**

**Primer.**

Saberite sledeće matrice:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = ?$$

Ovo činimo na sledeći način:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 1+2 & 0+1 \\ 3+4 & 2+5 & 5+8 \\ 4+2 & 7+1 & 8+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 7 & 7 & 13 \\ 6 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

## 2. Oduzimanje matrica

Matrice oduzimamo tako što svaki element jedne matrice oduzmemo sa odgovarajućim elementom druge matrice (odgovarajuće znači *sa iste pozicije*). Pogledajmo primer.

➲ **možemo da oduzimamo matrice samo kada su istih dimenzija**

**Primer.**

Oduzmite sledeće matrice:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = ?$$

Ovo činimo na sledeći način:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3 & 1-2 & 0-1 \\ 3-4 & 2-5 & 5-8 \\ 4-2 & 7-1 & 8-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -3 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

## 3. Množenje matrice skalarom

Matrice možemo da pomnožimo odgovarajućim skalarom (konstantom). Skalar množi svaki element matrice kada uđe u matricu.

**Primer.**

Izračunajte:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} = ?$$

Ovo činimo na sledeći način:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 9 & 6 & 15 \\ 12 & 21 & 24 \end{bmatrix}$$

## 4. Množenje matrica

Matrice množimo tako što svaki red množimo sa svakom kolonom. Jasnije će biti na detaljnom primeru koji ćemo predstaviti u nastavku, ali prvo da sagledamo neke veoma bitne stvari u vezi množenja matrica:

➲ **Ne možemo uvek pomnožiti dve matrice.** Postoji sledeći uslov da bi množenje dve matrice bilo moguće:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}_{3\times\boxed{2}} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{\boxed{2}\times 3}$$

Ovi brojevi (unutrašnji brojevi) moraju biti isti da bismo mogli pomnožiti matrice! Ovde važi da je 2=2, te je množenje ove dve matrice moguće.

➲ **Dimenzije nove matrice.** Pazite koje su dimenzije nove matrice:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}_{\boxed{3}\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{2\times \boxed{3}} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Dimenzije nove matrice su zapravo spoljašnji brojevi!

**Primer.**
Izračunajte:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Obavezno proveravamo da li su unutrašnji brojevi dimenzija isti. Kao što vidimo, 2=2 tako da jesu, te možemo da množimo matrice. Dimenzije nove matrice biće spoljašnji brojevi, tj. 3x3:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Sada, množimo prvi red sa prvom kolonom:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 + 2\cdot 3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Potom, množimo prvi red sa drugom kolonom:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 12 & 3\cdot 1 + 2\cdot 2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Konačno, množimo prvi red sa trećom kolonom:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 12 & 7 & 3\cdot 5 + 2\cdot 4 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Onda prelazimo na drugi red i ponavljamo postupak. Množimo drugi red sa prvom kolonom:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 12 & 7 & 23 \\ 1\cdot 2 + 5\cdot 3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Potom, množimo drugi red sa drugom kolonom:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 12 & 7 & 23 \\ 17 & 1\cdot 1 + 5\cdot 2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Konačno, množimo drugi red sa trećom kolonom:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}_{3\times2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 12 & 7 & 23 \\ 17 & 11 & 1\cdot5+5\cdot4 \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{3\times3}$$

Onda prelazimo na treći red i ponavljamo postupak. Množimo treći red sa prvom kolonom:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}_{3\times2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 12 & 7 & 23 \\ 17 & 11 & 25 \\ 6\cdot2+4\cdot3 & \dots & \dots \end{bmatrix}_{3\times3}$$

Potom, množimo treći red sa drugom kolonom:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}_{3\times2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 12 & 7 & 23 \\ 17 & 11 & 25 \\ 24 & 6\cdot1+4\cdot2 & \dots \end{bmatrix}_{3\times3}$$

Konačno, množimo treći red sa trećom kolonom i dobijamo rešenje:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}_{3\times2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 12 & 7 & 23 \\ 17 & 11 & 25 \\ 24 & 14 & 46 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

***NAPOMENA: MNOŽENJE MATRICA NIJE KOMUTATIVNO!***

Za razliku od množenja kod racionalnih izraza gde je prisutna osobina komutativnosti, kod množenja matrica to nije slučaj. Šta je zapravo komutativnost? To znači da je svejedno da li množimo prvi element sa drugim elementom, ili drugi element sa prvim elementom. Na primer, kod racionalnih izraza to je:

$$2\cdot3=3\cdot2$$

S druge strane, kod množenja matrica, ukoliko definišemo sledeće matrice:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}_{3\times2} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

treba da znamo da komutativnost množenja nije prisutna:

$$A\cdot B\neq B\cdot A$$

$A\cdot B$ smo izračunali u gornjem primeru. Ukoliko bismo krenuli da računamo $B\cdot A$, primetili bismo da možemo da izvršimo i ovo množenje (jer su unutrašnji brojevi jednaki, tj. 3=3), ali nova matrica bi bila dimenzija 2x2, te svakako zaključujemo da je rešenje drugačije.

# Determinante

Determinanta je funkcija koja svakoj **kvadratnoj** matrici (ovo znači da matrica ima isti broj kolona i redova) daje određenu skalarnu vrednost. Determinantu od određene matrice označavamo tako što umesto uglastih zagrada pišemo apsolutnu („ravnu“) zagradu. Determinanta matrice A koju smo opisali na strani 8 ove skripte je:

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}_{3\times3}$$

Kako ćemo izračunati determinantu? Postupak za izračunavanje vrednosti zavisi od dimenzija matrice. Najviše se bavimo dimenzijama 2x2 i 3x3, i one su najznačajnije za kolokvijum i ispit.

## 1. Determinanta 2x2

Postupak za rešavanje jeste da pomnožimo dijagonalu s leva na desno i od nje oduzmemo dijagonalu sa desna na levo. Pogledajmo primer.

**Primer.**

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (2 \cdot 5) - (-1 \cdot 3) = 10 - (-3) = 13$$

***NAPOMENA: MINUSI***

Pazite na minuse! Jedna od najčešćih grešaka studenata jeste da gornji primer izračunaju na sledeći način:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (2 \cdot 5) - 1 \cdot 3 = 10 - 3 = 7$$

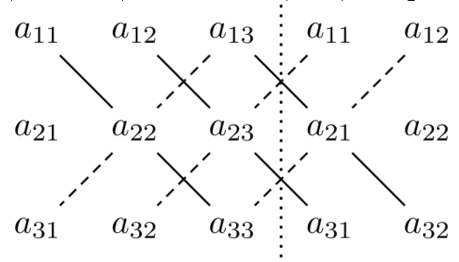
**Ovo nije tačno!** U samom postupku je da treba da oduzmete drugu dijagonalu, a takođe imate i -1 kao element tako da se ti minusi pretvore u plus, te imamo:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (2 \cdot 5) - (-1 \cdot 3) = 10 - (-3) = 13$$

## 2. Determinanta 3x3 (Sarusovo pravilo)

Postupak za rešavanje jeste da primenimo tzv. Sarusovo pravilo. Ono obuhvata da:
- dodamo četvrtu i petu kolonu u matricu (koje su iste kao prva i druga kolona)
- množimo dijagonale s leva na desno i sabiramo ih
- potom oduzmemo zbir proizvoda dijagonala s desna na levo

Ovo je sumirano na sledećoj ilustraciji. Sve će biti jasnije na primeru u nastavku.




**Primer.**

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

Prvo dodamo prvu i drugu kolonu, a potom množimo dijagonale i sabiramo ih:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & 3 \\ 8 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} = 0 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 8 \cdot 2 \ldots$$

Zatim oduzimamo zbir proizvoda dijagonala sa desna na levo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & 3 \\ 8 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} = 0 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 8 \cdot 2 - (1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 0 + 1 \cdot 8 \cdot 3)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 12 + 32 - (2 + 0 + 24) = 44 - 26 = 18$$

### 3. Determinanta 4x4 (Teorema o razvijanju determinante)

Postupak je prilično dugačak i koristimo ga prilično retko. Stoga, ovo nećemo obraditi u skripti, ali možete pogledati sledeći snimak ukoliko vas zanima kako se dobija vrednost 4x4 determinante.

Link: https://youtu.be/zsIYwXiuWVc

## Važne matrice

Postoje određene važne matrice za koje moramo znati šta predstavljaju i zašto su značajne.

### 1. Jedinična matrica

Jedinična matrica predstavlja kvadratnu matricu koja ima sve nule, i dijagonalu s leva na desno koja sadrži jedinice. Označavamo je sa $I$.

$$I_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 2. Transponovana matrica

Transponovanje znači da zamenimo mesta kolonama i redovima. Na primer, ukoliko je matrica A jednaka:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Transponovana matrica matrice A jednaka je:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

## 3. Adjungovana matrica

Adjungovanu matricu dobijamo specifičnim postupkom, za koji je potrebno malo vežbe. Odmah ćemo preći na primer, koji ćemo postupno objasniti.

**Primer.**
Odrediti adjungovanu matricu matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Adjungovana matrica matrice A označava se kao $adjA$. Ima iste dimenzije kao i originalna matrica, a svaki element ćemo odrediti pojedinačno sledećim postupkom.

Za prvi element (pozicija 11 = prvi red, prva kolona), **predznak određujemo na osnovu zbira pozicije.** Pozicija je 11, što je zbir 1+1=2.

➔ Ukoliko je ovo parno, predznak je +
➔ Ukoliko je ovo neparno, predznak je –

Znači, predznak našeg prvog elementa je +.

Potom, uzmimo matricu A i napravimo krstić sa centrom u ovoj poziciji (poziciji 11):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Formiramo determinantu samo od onih elemenata koji nisu osenčeni:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Ovo stavljamo na poziciju 11 adjungovane matrice. **Dodatno, celu ovu matricu koju formiramo treba na kraju da transponujemo, tako da stavljamo T iznad cele matrice.**

$$adjA = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}^T$$

Za drugi element reda, pozicija je 12. Zbir je neparan (1+2=3), stoga predznak elementa je minus. Pravimo krstić i formiramo determinantu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$adjA = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}^T$$

Za treći element reda, pozicija je 13. Zbir je paran (1+3=4), stoga predznak elementa je plus. Pravimo krstić i formiramo determinantu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

svaki ovaj element nazivamo **algebarski kofaktor**

$$adjA = \begin{bmatrix} \boxed{+\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}} & -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}^T$$

Ovako nastavljamo i za drugi i za treći red. Nakon izračunavanja svih determinanti, treba da transponujemo matricu (zamenimo mesta redovima i kolonama) i dobijamo konačnu verziju adjungovane matrice matrici A. Proces jeste dug, ali nakon malo vežbe postaje rutinski i ne računa se teško.

## 4. Inverzna matrica

Adjungovana matrica nam je bitna za izračunavanje **inverzne matrice**. Inverznu matricu matrice A označavamo sa $A^{-1}$ i računamo je preko formule:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} adjA$$

Kao što vidite, uslov da bismo mogli izračunati inverznu matricu jeste da je $detA \neq 0$. Drugim rečima, determinanta matrice A ne sme biti nula, tj. matrica A ne sme biti singularna matrica.

➔ **Singularna matrica** je ona matrica čija je determinanta jednaka nuli.

➔ **Regularna matrica** je ona matrica čija je determinanta različita od nule.

***NAPOMENA: INVERZNA MATRICA MATRICE*** $A^{-1}$

Inverznost matrice važi i u obrnutom smeru. Inverzna matrica matrice $A^{-1}$ je matrica A. Zašto je ovo tako možemo videti u sledećem zapisu direktno:

$$(A^{-1})^{-1} = A^{1} = A$$

Ukoliko vam u zadatku daju kako izgleda $A^{-1}$ i traže vam da izračunate inverznu matricu ove matrice, vi znate da jednostavno treba primeniti isti postupak, te formulu:

$$A = \frac{1}{detA^{-1}} adjA^{-1}$$

***NAPOMENA: MNOŽENJE MATRICE SA NJENOM INVERZNOM MATRICOM DAJE JEDINIČNU MATRICU***

Matematički zapisano:

$$AA^{-1} = I$$

Ovo će nam biti korisno kada budemo rešavali matrične jednačine.

# Matrične jednačine

Ponekad na kolokvijumu dođe i neka matrična jednačina koju je potrebno rešiti.

**Primer.**
Ako je $X^{-1}A = B$, onda je $X = ?$

Bitno je da se podsetimo da **množenje matrica nije komutativno**, **tako da je bitno da li množimo sa desne ili leve strane**. Na primer, ukoliko ovu jednačinu pomnožimo sa X sa desne strane, imamo:

$$X^{-1}AX = BX$$

Kao što vidite, u ovom konkretnom primeru ovo nam i ne pomaže nešto. U matričnim jednačinama cilj nam je da izrazimo ono što se traži (X). Pomnožimo jednačinu sa X ali sa leve strane:

$$XX^{-1}A = XB$$

**Proizvod matrice i njene inverzne matrice daje jediničnu matricu**, koja ne utiče na dalje množenje (igra istu ulogu kao i jedinica u običnom množenju). Stoga:

$$XX^{-1}A = XB$$
$$IA = XB$$
$$A = XB$$

Potrebno je da izrazimo samo X. Da bismo ovo učinili, pomnožimo jednačinu sa $B^{-1}$ sa desne strane:

$$AB^{-1} = XBB^{-1}$$
$$AB^{-1} = X$$
$$X = AB^{-1}$$

I ovo je rešenje matrične jednačine! Jedino što moramo još da napomenemo jeste uslov da možemo naći inverznu matricu matrice B, a to znači da je uslov da matrica B bude regularna, tj. da $detB \neq 0$, tako da konačno rešenje zapisujemo kao:

$$X = AB^{-1},\ detB \neq 0$$

# Rang matrice

Jedan od vrlo čestih zadataka na kolokvijumu jeste određivanje ranga matrice. Suština jeste da vršimo sličan postupak kao i kada smo radili Gausov metod kod sistema linearnih jednačina, samo je cilj nešto drugačiji – želimo da napravimo „trouglić sa nulama“. Konkretan postupak kako određujemo rang matrice biće mnogo jasniji na primeru. Prikazaćemo **dva odvojena slučaja** – određivanja ranga matrice bez parametra, i određivanje ranga matrice sa parametrom. **Napomena**: Rang matrice je isto što i broj nezavisnih kolona/vrsta matrice. Ukoliko vam u zadatku traže da izračunate broj nezavisnih kolona ili vrsta matrice, zapravo vam traže da izračunate rang date matrice.

## 1. Određivanje ranga matrice bez parametra

**Primer.**
Odrediti rang matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Cilj nam je da napravimo „trouglić nula“:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**Treba da znamo da kod matrica možemo da množimo redove/kolone, i dodajemo ih drugim redovima/kolonama.** Izaberimo jedinicu iz prve kolone iz prvog reda, te fiksiramo prvi red, i primenimo postupak sličan Gausu – množimo prvi red sa -2 i sabiramo ga sa drugim redom:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (-2)$$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Isti postupak imamo i za treći red – množimo prvi red sa -3 i dodajemo ga trećem redu:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (-3)$$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Sada gledamo sledeću kolonu (drugu kolonu). Prvi red više ne diramo, jer je on fiksiran (što vidimo jer smo to označili kao kvadratić oko jedinice). Sada je potrebno još da vidimo šta da uradimo sa drugim i trećim redom. Treba da stvorimo nulu na poziciji 32, gde je sada jedinica. Da bismo ovo učinili, pomnožimo drugi red sa -1 i dodajmo ga trećem redu:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad (-1)$$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Napravili smo „trouglić nula“ i ništa dalje ne treba da radimo. Rang matrice zaključujemo na osnovu „broja kvadratića“ koje smo označili kada smo fiksirali redove i baratali matricom. Stoga, zaključujemo da je u ovom zadatku $rangA = 2$.

**Bitno!** U slučaju da nismo dobili sve nule u poslednjem redu, onda bismo fiksirali i određeni broj u poslednjem redu:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 5 \end{bmatrix}$$

Tako da bi rang matrice onda bio $rangA = 3$.

## 2. Određivanje ranga matrice sa parametrom

**Primer.**
Odrediti rang matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & -1 & a & 3 \\ 1 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kada imamo neki parametar u matrici, a treba da odredimo rang matrice, prvo nam je cilj da **parametre pomerimo što više možemo udesno i nadole**. Kolone i redove možemo zamenjivati međusobno u matrici bez problema. Stoga, prebacimo četvrtu kolonu da bude prva:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 3 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Time smo pomerili parametre na desno. Sada hoćemo da ih pomerimo nadole, tako da možemo da stavimo da poslednji red bude prvi red:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 3 & 2 & -1 & a \end{bmatrix}$$

Sada smo završili sa pomeranjem parametara. Zamenimo još prvu i drugu kolonu da ne bismo imali problema sa nulama:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & 3 & -1 & a \end{bmatrix}$$

Sada možemo da krenemo da primenjujemo isti postupak kao i kada nema parametra – da napravimo „trouglić nula“:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & 3 & -1 & a \end{bmatrix}$$

Fiksiramo prvi red, prvi element (1). Množimo prvi red sa -1 i dodajemo drugom redu:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & 3 & -1 & a \end{bmatrix} \quad (-1)$$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & a-10 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & a \end{bmatrix}$$

Množimo prvi red sa -2 i dodajemo trećem redu:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & a-10 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & a \end{bmatrix} \quad (-2)$$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & a-10 & 1 \\ 0 & 3 & -21 & a \end{bmatrix}$$

Sada gledamo da u drugoj koloni napravimo nulu na poziciji 32, gde je sada trojka. Fiksiramo drugi red (jedinicu iz druge kolone), i množimo sa -3 pa dodajemo trećem redu:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 10 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & a-10 & 1 \\ 0 & 3 & -21 & a \end{bmatrix} \quad (-3)$$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 10 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & a-10 & 1 \\ 0 & 0 & -3a+9 & a-3 \end{bmatrix}$$

Šta sada možemo da primetimo? Ukoliko smo ovim korakom dobili nule u poslednjem redu, onda je rang 2. Drugim rečima, ukoliko je:

$$-3a + 9 = 0 \rightarrow a = 3$$

onda je rang matrice 2. S druge strane, ukoliko nismo dobili nule u poslednjem redu, odnosno ukoliko je:

$$-3a + 9 \neq 0 \rightarrow a \neq 3$$

onda je rang matrice 3.

***NAPOMENA: ŠTA JE BAZISNI MINOR?***

Ako je $r$ rang neke matrice A, onda determinantu svake njene matrice dimenzija $r \times r$ nazivamo bazisnim minorom matrice A. Drugim rečima, iz matrice A gledamo da nađemo neku „podmatricu" dimenzija $r \times r$ čija determinanta je različita od nule.

Uzmimo primer matrice sa str.17-18, gde smo utvrdili da je rang $r = 2$. Sad pogledajmo matricu i nađimo neku podmatricu dimenzija $2 \times 2$ čija determinanta nije nula. Na primer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (1 \cdot 3) - (1 \cdot 2) = 1 \neq 0$$

Stoga, zaključujemo da je $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ jedan od **bazisnih minora** matrice A.

# Kramerovo pravilo

Pored Gausovog metoda rešavanja sistema linearnih jednačina, postoje i drugi metodi, koji uključuju **Kramerovo pravilo** i **Kroneker-Kapelijevu teoremu**. Kramerovo pravilo primenjujemo kada imamo sistem koji formira kvadratnu matricu dimenzija $3 \times 3$, a Kroneker-Kapelijevu teoremu kada ovo nije slučaj.

**Za primenu Kramerovog pravila, potrebno je da izračunamo određene determinante, i to:**

- determinantu sistema $\Delta$ (determinanta $3x3$ koja kao elemente uzima koeficijente pored $x$, $y$ i $z$)

- determinantu $\Delta_x$ (determinanta $3x3$ koja za prvu kolonu umesto koeficijenata uz $x$ uzima koeficijente rezultata)

- determinantu $\Delta_y$ (determinanta $3x3$ koja za drugu kolonu umesto koeficijenata uz $y$ uzima koeficijente rezultata)

- determinantu $\Delta_z$ (determinanta $3x3$ koja za treću kolonu umesto koeficijenata uz $z$ uzima koeficijente rezultata)

**Rešenja zaključujemo na osnovu sledećih pravila:**

1) Ukoliko je $\Delta \neq 0$, sistem je saglasan i imamo jedinstveno rešenje oblika:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

2) Ukoliko je $\Delta = 0 \;\wedge\; \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z = 0$, sistem je saglasan i imamo beskonačno mnogo rešenja.

3) Ukoliko je $\Delta = 0 \;\wedge\; bar\ jedno\ \Delta_i \neq 0$, sistem nije saglasan, tj. sistem nema rešenja.

**Primer.**

(20 poena) Primenom Kramerovog pravila, rešiti sistem jednačina:

$$2x + y = 0$$
$$-x + y + 2z = 1$$
$$ax + 2ay + 2z = 1$$

Računamo determinante (primenom Sarusovog pravila) potrebne za primenu Kramerovog pravila:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ a & 2a & 2 \end{vmatrix} = -6(a-1)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 2 \\ \mathbf{1} & 2a & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{0} & 0 \\ -1 & \mathbf{1} & 2 \\ a & \mathbf{1} & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \mathbf{0} \\ -1 & 1 & \mathbf{1} \\ a & 2a & \mathbf{1} \end{vmatrix} = -3(a-1)$$

1) Ukoliko je $\Delta \neq 0$, imamo jedinstveno rešenje. Znači, ukoliko je:

$$-6(a-1) \neq 0 \rightarrow a \neq 1$$

imamo jedinstveno rešenje:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

$$x = \frac{0}{\Delta}, \quad y = \frac{0}{\Delta}, \quad z = \frac{-3(a-1)}{-6(a-1)} = \frac{1}{2}$$

$$(x, y, z) = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$$

2) Ukoliko je $\Delta = 0$ i važi da $\Delta_x = 0, \Delta_y = 0$ i $\Delta_z = 0$, imamo beskonačno mnogo rešenja. Znači, ukoliko je:

$$-6(a-1) = 0 \rightarrow a = 1 \text{ i}$$
$$-3(a-1) = 0 \rightarrow a = 1$$

imamo beskonačno mnogo rešenja, koja možemo izraziti tako što zamenimo da je $x = \alpha \in \mathbb{R}$ i izrazimo ostalo:

$$2\alpha + y = 0 \rightarrow y = -2\alpha$$
$$-\alpha - 2\alpha + 2z = 1 \rightarrow z = \frac{1 + 3\alpha}{2}$$

Rešenja su:

$$(x, y, z) = \left(\alpha, -2\alpha, \frac{1 + 3\alpha}{2}\right), \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

3) Iz prethodnog dela zadatka sledi da ako imamo da je $\Delta = 0$ (što znači ovde $a = 1$), takođe imamo i da je $\Delta_z = 0$. Za $x$ i $y$ svakako važi $\Delta_x = 0, \Delta_y = 0$. Stoga, ne postoji slučaj kada sistem nema rešenja.

# Kroneker-Kapelijeva teorema

Ovu teoremu primenjujemo kada nemamo matricu $3x3$ za rešavanje sistema (jer tada ne možemo Kramerovo pravilo), ali možemo da je primenimo i kada imamo matricu $3x3$.

**Za primenu Kroneker-Kapelijeve teoreme, potrebno je da izračunamo rangove određenih matrica, i to:**
- rang matrice sistema, $rangA$ (matrice koja kao elemente uzima koeficijente pored $x$, $y$ i $z$)
- rang proširene matrice sistema, $rangA_p$ (matrice koja kao elemente uzima koeficijente pored $x$, $y$, $z$ i rezultate)

**Rešenja zaključujemo na osnovu sledećih pravila:**
1) Ukoliko je $rangA = rangA_p = broj\ nepoznatih$, sistem je saglasan i imamo jedinstveno rešenje.
2) Ukoliko je $rangA = rangA_p < broj\ nepoznatih$, sistem je saglasan i imamo beskonačno mnogo rešenja.
3) Ukoliko je $rangA \neq rangA_p$, sistem nije saglasan, tj. sistem nema rešenja.

**Primer.**
(20 poena) Primenom Kroneker-Kapelijeve teoreme, rešiti sistem jednačina:

$$2x - y + z + u = 1$$
$$x + 2y - z + 4u = 2$$
$$x + 7y - 4z + 11u = a$$

Za primenu Kroneker-Kapelijeve teoreme, potrebno je da izračunamo rang matrice sistema i proširene matrice sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array}\right)$$

Ukoliko je $rangA = rangA_p = broj\ nepoznatih$, imamo jedinstveno rešenje. U našem slučaju, rang će biti isti ukoliko je $a - 5 = 0$, tj. $a = 5$. Rang obe matrice će tada biti $rangA = rangA_p = 2$, što je manje od 4 nepoznate koje imamo. Stoga, za $a = 5$, sistem nema jedinstveno rešenje, već beskonačno mnogo rešenja. Ukoliko uzmemo da je $z = \alpha \in \mathbb{R}$ i $u = \beta \in \mathbb{R}$, izražavanjem ćemo dobiti rešenje:

$$(x, y, z, u) = \left(\frac{4 - \alpha - 6\beta}{5}, \frac{3 + 3\alpha - 7\beta}{5}, \alpha, \beta\right), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Ukoliko je $rangA \neq rangA_p$, sistem nema rešenja. U našem slučaju ovo će da važi ukoliko je $a \neq 5$. Za ovu vrednost $a$, rešenje sistema je:

$$(x, y, z, u) \in \emptyset$$

# Dodatni zadaci za vežbanje

Prethodno smo prešli nekoliko primera rešenih kolokvijumskih zadataka. Mnogo više kolokvijumskih zadataka za vežbanje dostupno je na Skripte Ekof onlajn kursu za kolokvijum iz Matematike (skripteekof.com/matematika-kursevi), kao i dodatna objašnjenja, podrška za sva pitanja i dr.

# Lekcija 16: Izvodi

## Pregled lekcije

U okviru ove lekcije imaćete priliku da naučite sledeće:

- **prvi izvod funkcije** – šta predstavlja i zašto je značajan;
- **tablični izvodi** – koje izvode treba da zapamtite i primenjujete u zadacima;
- **osnovna pravila računanja izvoda** – kako se računa izvod zbira, razlike, proizvoda, količnika, kao i konstante;
- **izvod složene funkcije** – kako se primenjuje u zadacima;
- **drugi izvod funkcije** – šta predstavlja i zašto je značajan;

## Prvi izvod funkcije

Još kod lekcija 1-13 naučili smo dosta o funkcijama, koje određeni „input“ ($x$) pretvaraju u određenu vrednost „autputa“ ($y$) – a funkcije opisuju na koji se ovo način dešava. Na primer, funkcija $f(x) = 2x$ uzima input x i duplira ga, što je autput y naše funkcije.

Iz funkcije možemo izračunati njen izvod. Šta predstavlja prvi izvod funkcije? Jednostavno rečeno, prvi izvod funkcije (zajedno sa diferencijalom, o kojem ćemo učiti kasnije za kolokvijum) će nam pomoći da uvidimo šta se dešava sa vrednošću funkcije („autputom“) ukoliko dođe do promene promenljive u funkciji („inputa“), a da pritom ta promena inputa teži nuli (predstavlja veoma malu promenu). Matematički, prvi izvod funkcije možemo zapisati kao:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

gde $\Delta$ predstavlja promenu.

Na primer, prvi izvod naše funkcije $f(x) = 2x$ je $f'(x) = 2$, što ukazuje da kada se promeni x, vrednost funkcije će se uvećati duplo. Prvi izvod označavamo sa jednim apostrofom iznad $f$, što takođe čitamo i kao „prim“.

Formalnu definiciju izvoda, kao i neke primere, možete pogledati na sledećem linku informativno (ovo vam neće biti potrebno za kolokvijum):
**http://youtu.be/O_ZBZOelWyE**

Ono što je bitno za kolokvijum jeste da naučite da baratate dobro sa izvodima, a to podrazumeva da dobro uvežbate:
**1.** Tablične izvode
**2.** Osnovna pravila računanja izvoda
**3.** Izvod složene funkcije