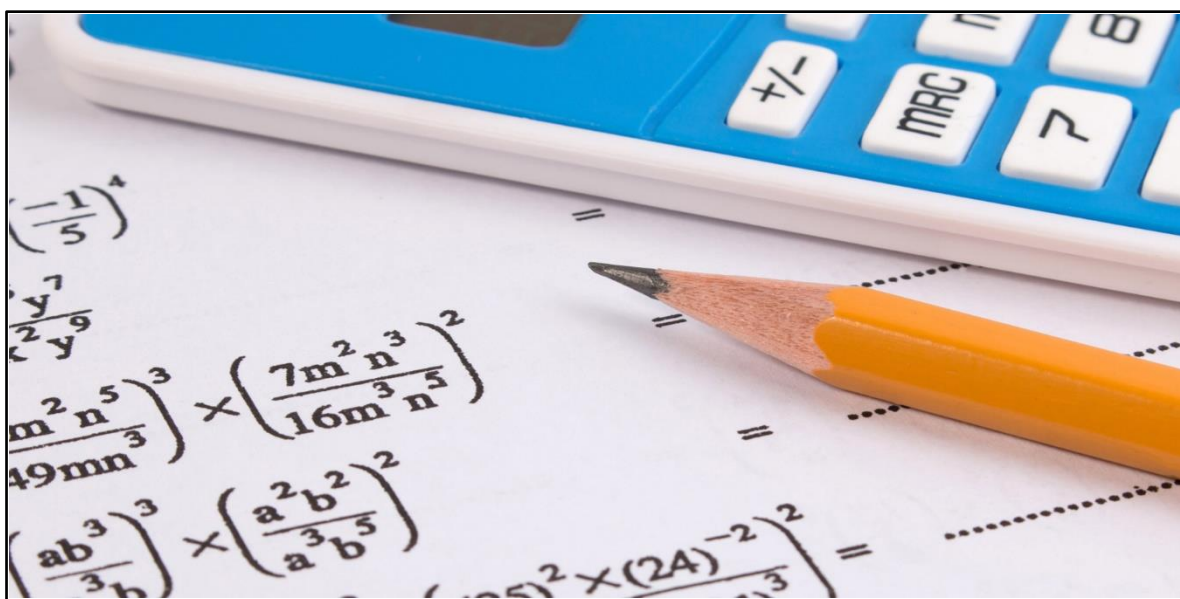


# Matematika

## Baze za pismeni deo ispita

Preko 100 dodatnih ispitnih zadataka za vežbanje



**SKRIPTE  
EKOF**

Spremite ispit - lako i efikasno!

### SKRIPTE ZA MATEMATIKU 2020/21

I kolokvijum		II kolokvijum		III kolokvijum		Ispit		
Skripta	Baze	Skripta	Baze	Skripta	Baze	Skripta	Baze	Rokovi
Primeri	Pregledi	Primeri	Pregledi	Primeri	Pregledi	Teorija	Zamenski	

© 2020 Skripte Ekof. Sva prava su zadržana. Autor zabranjuje beleženja i umnožavanja svog dela u celosti ili delimično, bilo kojim sredstvima, u bilo kom obliku, na bilo koji trajni ili privremeni, posredni ili neposredni način. (član 20. Zakona o autorskom i drugim srodnim pravima „Službeni glasnik RS“, br. 104/2009, 99/2011, 119/2012, 29/2016 - Odluka US RS i 66/2019)

# Lekcija 1: Racionalne funkcije

## Zadatak 1

(septembar 2016.) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije:

$$f(x) = \frac{x^2 + 8x + 7}{x - 1}$$

Rešenje:

- 1) Domen  $Df: x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
- 2) Presek sa  $x$ -osom  $B(-1,0), C(-7,0)$ , presek sa  $y$ -osom  $A(0, -7)$
- 3) Znak funkcije:

$$f(x) > 0 \text{ za } x \in (-7, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \text{ za } x \in (-\infty, -7) \cup (-1, 1)$$

- 4) Parnost funkcije: nije parna, nije neparna
- 5) Asimptote:
  - vertikalne:  $x = 1$  (i sa leve i sa desne strane), horizontalne nema
  - kose:  $y = x + 9$  (i sa leve i sa desne strane)
- 6) Ekstremne tačke:  $E(-3, 2)$  maksimum;  $F(5, 18)$  minimum
- 7) Monotonost funkcije:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{(x - 1)^2}$$

funkcija raste, tj.  $f'(x) > 0$  za  $x \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$

funkcija opada, tj.  $f'(x) < 0$  za  $x \in (-3, 1) \cup (1, 5)$

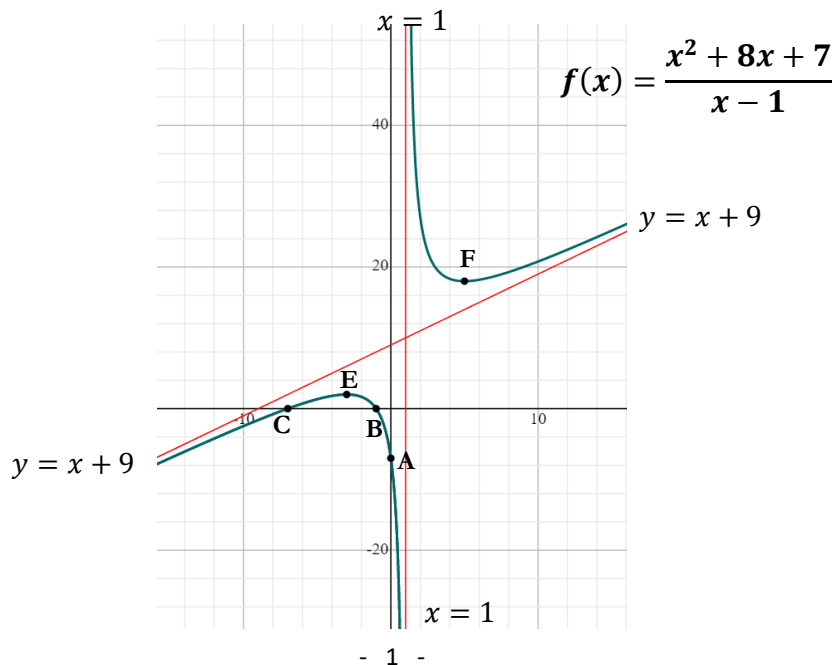
- 8) Prevojne tačke: nema prevojnih tačaka
- 9) Konveksnost/konkavnost:

$$f''(x) = \frac{32}{(x - 1)^3}$$

funkcija je konveksna, tj.  $f''(x) > 0$  za  $x \in (1, +\infty)$

funkcija je konkavna, tj.  $f''(x) < 0$  za  $x \in (-\infty, 1)$

- 10) Grafik funkcije:



**Zadatak 2**

(februar 2016.) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije:

$$f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$$

Rešenje:

- 1) Domen  $Df: x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$
- 2) Presek sa  $x$ -osom  $B(0,0)$ , presek sa  $y$ -osom  $A(0,0)$
- 3) Znak funkcije:

$$f(x) > 0 \text{ za } x \in (0, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \text{ za } x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$$

- 4) Parnost funkcije: nije parna, nije neparna
- 5) Asimptote:
  - vertikalne:  $x = -1$  (i sa leve i sa desne strane)
  - horizontalne: nema
  - kose:  $y = \frac{x}{2} - 1$  (i sa leve i sa desne strane)

6) Ekstremne tačke:  $E\left(-3, -\frac{27}{8}\right)$  maksimum

7) Monotonost funkcije:

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$$

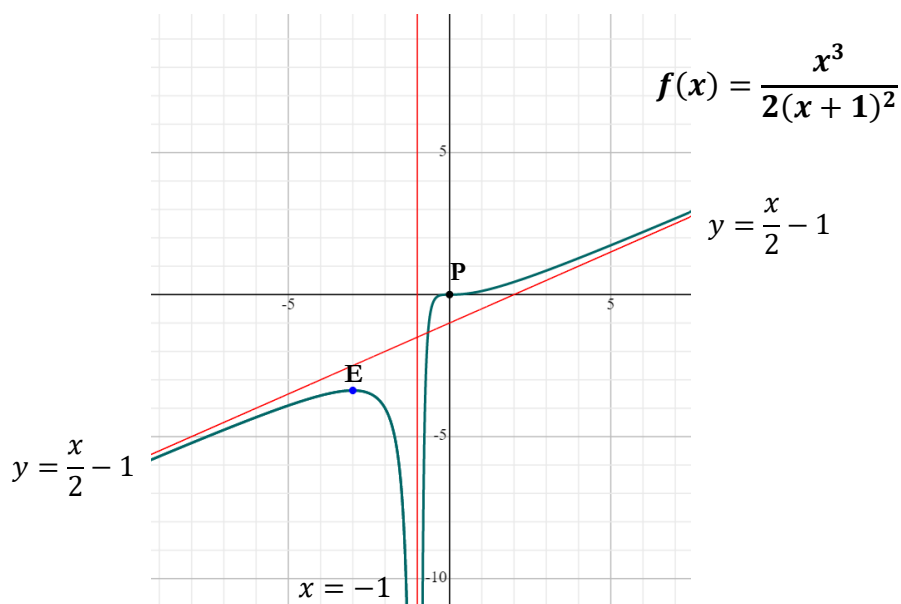
funkcija raste, tj.  $f'(x) > 0$  za  $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ funkcija opada, tj.  $f'(x) < 0$  za  $x \in (-3, -1)$ 8) Prevojne tačke:  $P(0, 0)$ 

9) Konveksnost/konkavnost:

$$f''(x) = \frac{3x}{(x+1)^4}$$

funkcija je konveksna, tj.  $f''(x) > 0$  za  $x \in (0, +\infty)$ funkcija je konkavna, tj.  $f''(x) < 0$  za  $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ 

10) Grafik funkcije:



**Zadatak 3**

(februar 2016.) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije:

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$$

Rešenje:

1) Domen  $Df: x \in (-\infty, +\infty)$ 2) Presek sa  $x$ -osom  $B(0,0)$ , presek sa  $y$ -osom  $A(0,0)$ 

3) Znak funkcije:

$$f(x) > 0 \text{ za } x \in (0, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \text{ za } x \in (-\infty, 0)$$

4) Parnost funkcije: nije parna, jeste neparna

5) Asimptote:

- vertikalne: nema, horizontalne: nema

- kose:  $y = 2x$  (i sa leve i sa desne strane)

6) Ekstremne tačke: nema ekstremnih tačaka

7) Monotonost funkcije:

$$f'(x) = \frac{2(x^4 + 3x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

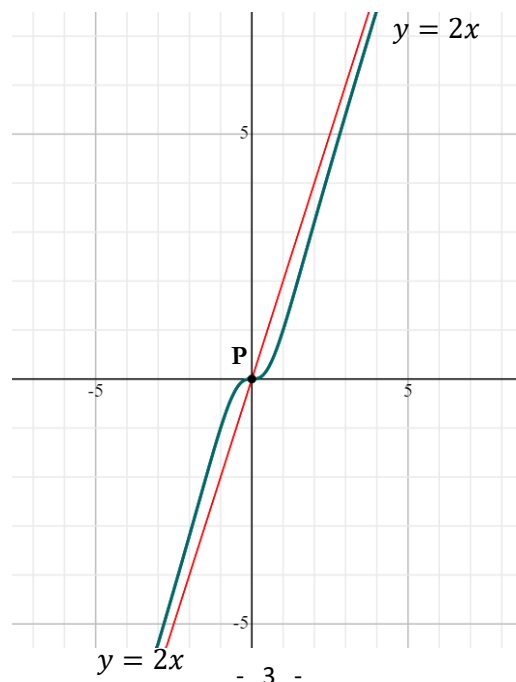
funkcija raste, tj.  $f'(x) > 0$  za  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ funkcija opada, tj.  $f'(x) < 0$  za  $x \in \emptyset$ 8) Prevojne tačke:  $P(0, 0)$ ,  $Q\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $R\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ 

9) Konveksnost/konkavnost:

$$f''(x) = \frac{4x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}$$

funkcija je konveksna, tj.  $f''(x) > 0$  za  $x \in (-\infty, -3) \cup (0, \sqrt{3})$ funkcija je konkavna, tj.  $f''(x) < 0$  za  $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ 

10) Grafik funkcije:



$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$$

**Zadatak 4**

(februar 2016.) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$$

Rešenje:

- 1) Domen  $Df: x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- 2) Presek sa  $x$ -osom  $B(2,0), C(1,0)$  nema presek sa  $y$ -osom
- 3) Znak funkcije:

$$f(x) > 0 \text{ za } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (2, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \text{ za } x \in (1, 2)$$

- 4) Parnost funkcije: nije parna, nije neparna
- 5) Asimptote:
  - vertikalne:  $x = 0$  (sa obe strane)
  - horizontalne:  $y = 1$  (sa obe strane), kose: nema
- 6) Ekstremne tačke:  $E\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{8}\right)$  minimum
- 7) Monotonost funkcije:

$$f'(x) = \frac{3x - 4}{x^3}$$

$$\text{funkcija raste, tj. } f'(x) > 0 \text{ za } x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$$

$$\text{funkcija opada, tj. } f'(x) < 0 \text{ za } x \in \left(0, \frac{4}{3}\right)$$

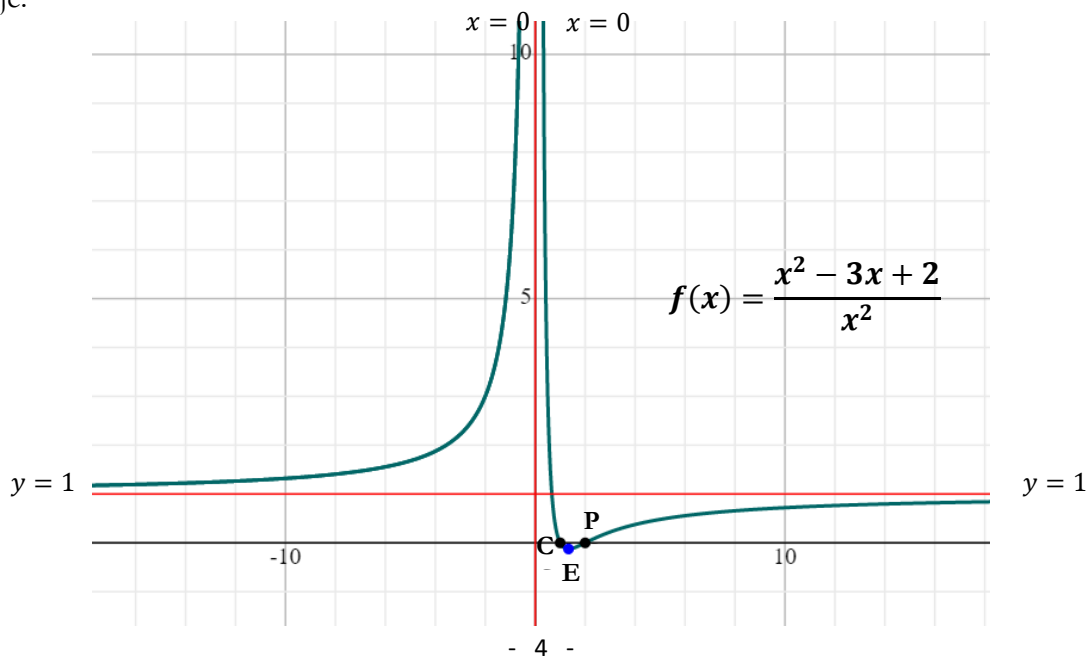
- 8) Prevojne tačke:  $P(2, 0)$
- 9) Konveksnost/konkavnost:

$$f''(x) = \frac{6(2-x)}{x^4}$$

$$\text{funkcija je konveksna, tj. } f''(x) > 0 \text{ za } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2)$$

$$\text{funkcija je konkavna, tj. } f''(x) < 0 \text{ za } x \in (2, +\infty)$$

- 10) Grafik funkcije:



**Zadatak 5**

(februar 2016.) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije:

$$f(x) = \frac{x-2}{(x-4)^2}$$

Rešenje:

1) Domen  $Df: x \in (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$ 2) Presek sa  $x$ -osom  $B(2,0)$ , presek sa  $y$ -osom  $\left(0, -\frac{1}{8}\right)$ 

3) Znak funkcije:

$$f(x) > 0 \text{ za } x \in (2, 4) \cup (4, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \text{ za } x \in (-\infty, 2)$$

4) Parnost funkcije: nije parna, nije neparna

5) Asimptote:

- vertikalne:  $x = 4$  (sa obe strane)- horizontalne:  $y = 0$  (sa obe strane), kose: nema6) Ekstremne tačke:  $E\left(0, -\frac{1}{8}\right)$  minimum

7) Monotonost funkcije:

$$f'(x) = -\frac{x}{(x-4)^3}$$

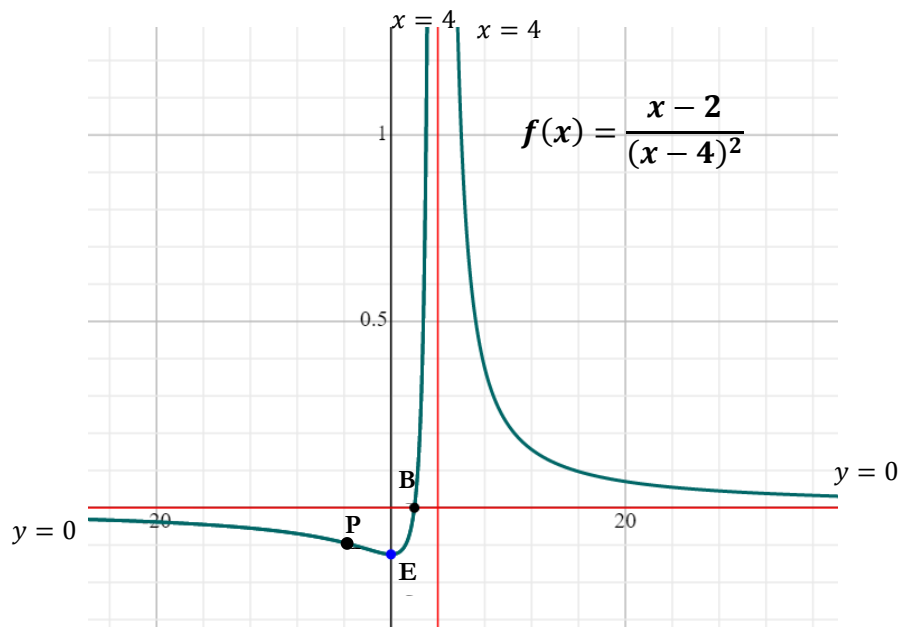
funkcija raste, tj.  $f'(x) > 0$  za  $x \in (0, 4)$ funkcija opada, tj.  $f'(x) < 0$  za  $x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ 8) Prevojne tačke:  $P\left(-2, -\frac{1}{9}\right)$ 

9) Konveksnost/konkavnost:

$$f''(x) = \frac{2(x+2)}{(x-4)^4}$$

funkcija je konveksna, tj.  $f''(x) > 0$  za  $x \in (-2, 4) \cup (4, +\infty)$ funkcija je konkavna, tj.  $f''(x) < 0$  za  $x \in (-\infty, -2)$ 

10) Grafik funkcije:



**Zadatak 6**

(januar 2014.) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije:

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{x^2+1}$$

Rešenje:

1) Domen  $Df: x \in (-\infty, +\infty)$ 2) Presek sa  $x$ -osom  $B(0,0)$ ,  $C(1,0)$ , presek sa  $y$ -osom  $A(0,0)$ 

3) Znak funkcije:

$$f(x) > 0 \text{ za } x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \text{ za } x \in (0, 1)$$

4) Parnost funkcije: nije parna, nije neparna

5) Asimptote: vertikalne asimptote nema, horizontalna asimptota  $y = 1$  sa obe strane, kose asimptote nema6) Ekstremne tačke:  $E\left(-1 - \sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$  maksimum;  $F\left(-1 + \sqrt{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$  minimum

7) Monotonost funkcije:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x^2 + 1)^2}$$

funkcija raste, tj.  $f'(x) > 0$  za  $x \in (-\infty, -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}, +\infty)$

funkcija opada, tj.  $f'(x) < 0$  za  $x \in (-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$

8) Prevojne tačke:  $P\left(-2 - \sqrt{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{4}\right)$ ,  $Q\left(-2 + \sqrt{3}, \frac{3-\sqrt{3}}{4}\right)$ ,  $R(1,0)$ 

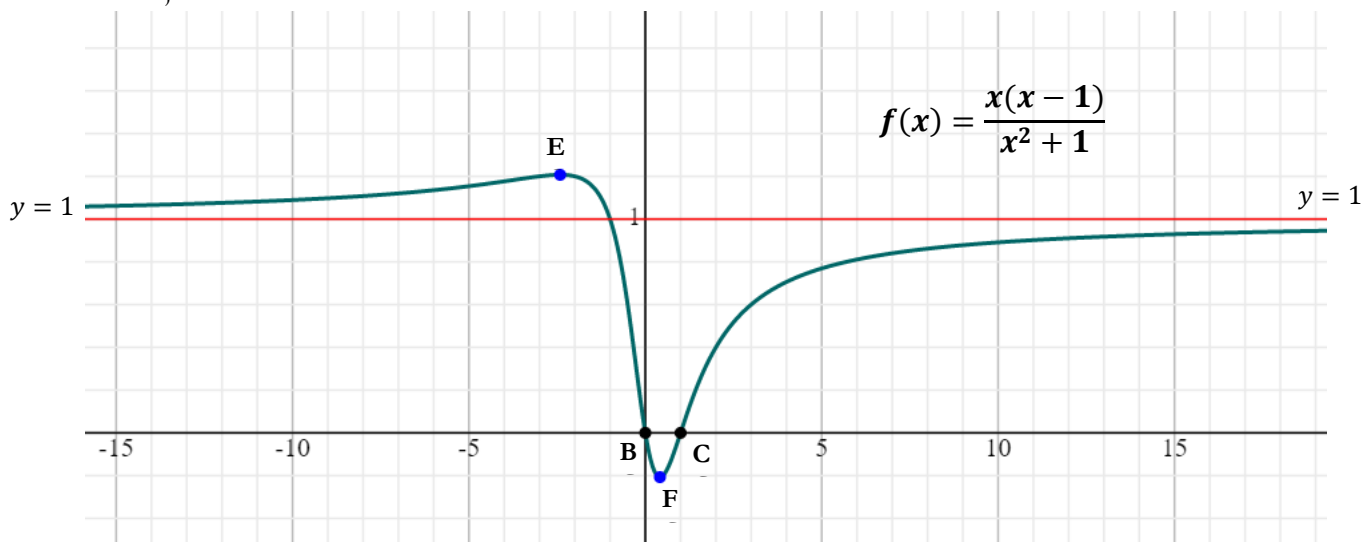
9) Konveksnost/konkavnost:

$$f''(x) = \frac{2(-x^3 - 3x^2 + 3x + 1)}{(x^2 + 1)^3}$$

funkcija je konveksna, tj.  $f''(x) > 0$  za  $x \in (-\infty, -2 - \sqrt{3}) \cup (-2 + \sqrt{3}, 1)$

funkcija je konkavna, tj.  $f''(x) < 0$  za  $x \in (-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}) \cup (1, +\infty)$

10) Grafik funkcije:



**Zadatak 7**

(septembar 2014.) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije:

$$f(x) = \frac{4x^2 + 13x + 10}{x + 1}$$

Rešenje:

1) Domen  $Df: x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

2) Presek sa  $x$ -osom  $B(-\frac{5}{4}, 0)$ ,  $C(-2, 0)$ , presek sa  $y$ -osom  $A(0, 10)$

3) Znak funkcije:

$$f(x) > 0 \text{ za } x \in \left(-2, -\frac{5}{4}\right) \cup (-1, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \text{ za } x \in (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{5}{4}, -1\right)$$

5) Asimptote: vertikalna asimptota  $x = -1$  sa obe strane, kosa asimptota  $y = 4x + 9$  sa obe strane6) Ekstremne tačke:  $E(-\frac{3}{2}, 1)$  maksimum;  $F(-\frac{1}{2}, 9)$  minimum

7) Monotonost funkcije:

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 8x + 3}{(x + 1)^2}$$

funkcija raste, tj.  $f'(x) > 0$  za  $x \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty)$

funkcija opada, tj.  $f'(x) < 0$  za  $x \in (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) \cup (-1, -\frac{1}{2})$

8) Prevojne tačke: nema prevojnih tačaka

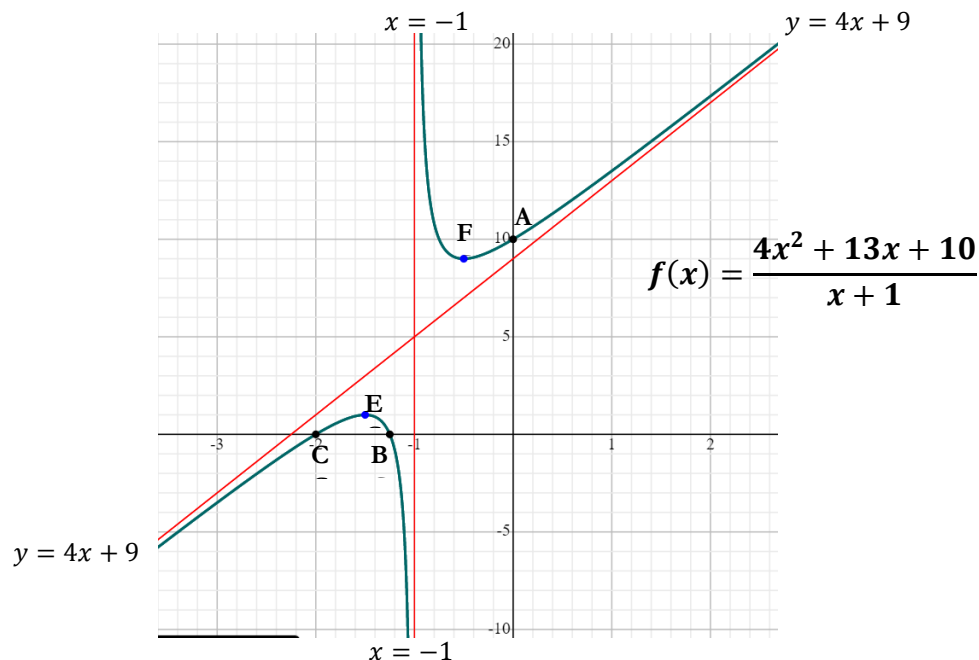
9) Konveksnost/konkavnost:

$$f''(x) = \frac{2}{(x + 1)^3}$$

funkcija je konveksna tj.  $f''(x) > 0$  za  $x \in (-1, +\infty)$

funkcija je konkavna, tj.  $f''(x) < 0$  za  $x \in (-\infty, -1)$

10) Grafik funkcije:





## Lekcija 2: Eksponencijalne funkcije

### Zadatak 1

(septembar 2016.) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{e^x}$$

Rešenje:

1) Domen  $Df: x \in (-\infty, +\infty)$

2) Presek sa  $x$ -osom *nema*, presek sa  $y$ -osom  $A(0,1)$

3) Znak funkcije:

$$f(x) > 0 \text{ za } x \in (-\infty, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \text{ za } x \in \emptyset$$

4) Parnost funkcije: nije parna, nije neparna

5) Asimptote:

- vertikalne: *nema* - horizontalne:  $y = 0$  (sa desne strane) kose: *nema*

6) Ekstremne tačke:  $E\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{e^{3/2}}\right)$  maksimum;  $F(0, 1)$  minimum

7) Monotonost funkcije:

$$f'(x) = \frac{x(3-2x)}{e^x}$$

$$\text{funkcija raste, tj. } f'(x) > 0 \text{ za } x \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{funkcija opada, tj. } f'(x) < 0 \text{ za } x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

8) Prevojne tačke:  $P\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{\sqrt{e}}\right), Q\left(3, \frac{22}{e^3}\right)$

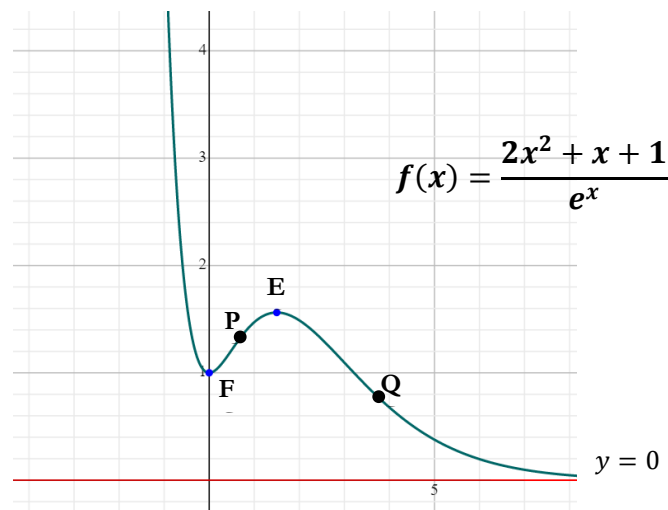
9) Konveksnost/konkavnost:

$$f''(x) = \frac{3-7x+2x^2}{e^x}$$

$$\text{funkcija je konveksna, tj. } f''(x) > 0 \text{ za } x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$$

$$\text{funkcija je konkavna, tj. } f''(x) < 0 \text{ za } x \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$$

10) Grafik funkcije:



**Zadatak 2**

(januar 2015.) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije:

$$f(x) = (x^2 + x)e^{-1/x}$$

Rešenje:

- 1) Domen  $Df: x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- 2) Presek sa  $x$ -osom  $B(-1, 0)$ , presek sa  $y$ -osom *nema*
- 3) Znak funkcije:

$$f(x) > 0 \text{ za } x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \text{ za } x \in (-1, 0)$$

- 4) Parnost funkcije: nije parna, nije neparna
- 5) Asimptote:
  - vertikalne:  $x = 0$  (sa leve strane)
  - horizontalne: *nema*, kose: *nema*
- 6) Ekstremne tačke: *nema*
- 7) Monotonost funkcije:

$$f'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}(2x^2 + 2x + 1)}{x}$$

funkcija raste, tj.  $f'(x) > 0$  za  $x \in (0, +\infty)$

funkcija opada, tj.  $f'(x) < 0$  za  $x \in (-\infty, 0)$

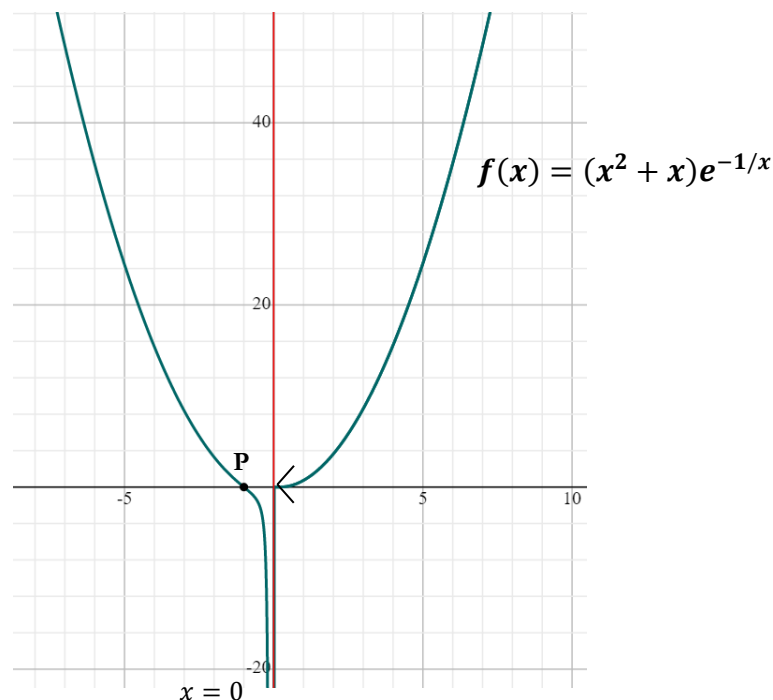
- 8) Prevojne tačke:  $P(-1, 0)$
- 9) Konveksnost/konkavnost:

$$f''(x) = \frac{2e^{-\frac{1}{x}}x^3 + 2e^{-\frac{1}{x}}x^2 + e^{-\frac{1}{x}}x + e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}$$

funkcija je konveksna, tj.  $f''(x) > 0$  za  $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

funkcija je konkavna, tj.  $f''(x) < 0$  za  $x \in (-1, 0)$

- 10) Grafik funkcije:



**Zadatak 3**

(januar 2015.) Ispitati tok i skicirati grafik funkcije:

$$f(x) = \frac{e^{3x}}{1+3x}$$

Rešenje:

1) Domen  $Df: x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$

2) Presek sa  $x$ -osom *nema*, presek sa  $y$ -osom  $A(0, 1)$ 

3) Znak funkcije:

$$f(x) > 0 \text{ za } x \in \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

$$f(x) < 0 \text{ za } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$$

4) Parnost funkcije: nije parna, nije neparna

5) Asimptote:

- vertikalne:  $x = -\frac{1}{3}$  (sa obe strane)- horizontalne:  $y = 0$  (sa leve strane), kose: *nema*6) Ekstremne tačke:  $E(0, 1)$  minimum

7) Monotonost funkcije:

$$f'(x) = \frac{9e^{3x}x}{(1+3x)^2}$$

funkcija raste, tj.  $f'(x) > 0$  za  $x \in (0, +\infty)$ funkcija opada, tj.  $f'(x) < 0$  za  $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ 8) Prevojne tačke: *nema*

9) Konveksnost/konkavnost:

$$f''(x) = \frac{9e^{3x}(9x^2 + 1)}{(1+3x)^3}$$

funkcija je konveksna, tj.  $f''(x) > 0$  za  $x \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ funkcija je konkavna, tj.  $f''(x) < 0$  za  $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ 

10) Grafik funkcije:

