Oznaka 14/20
Zadatak br.10

Oblast zadatka:
Ovo je zadatak iz lekcije 23 – Diferencne jednačine (skripta za drugi kolokvijum).

Rešenje:
$y_t = 4 \cdot 3^t - 1$

Objašnjenje:
Imamo jednačinu:

$$y_{t+1} - 3y_t = 2$$

Rešavamo diferencnu jednačinu standardnim postupkom. Opšti oblik linearne diferencne jednačine prvog reda je:

$$my_t + ay_{t-1} = q(t)$$

Odavde lako uočavamo da je $m = 1, a = -3$, a $q(t) = 2$.

Prvo treba da izračunamo homogeno rešenje ove diferencne jednačine. Ovo činimo tako što zapisujemo karakterističnu jednačinu oblika:

$$mr + a = 0$$

Zamenimo vrednosti za m i a kako bismo izračunali r:

$$1r - 3 = 0$$
$$r - 3 = 0$$
$$r = 3$$

Homogeno rešenje je oblika:

$$y_t^h = c \cdot r^t$$

gde je c konstanta (eng. constant).

Kada zamenimo vrednost r, homogeno rešenje ove jednačine je:

$$y_t^h = c \cdot 3^t$$

Nakon što smo izračunali homogeno rešenje jednačine, potrebno je da izračunamo partikularno rešenje jednačine. Posmatrajmo diferencnu jednačinu u nešto drugačijem obliku (te poredimo opšti oblik i našu jednačinu):

$$my_t + ay_{t-1} = (polinom)^n \cdot c^t$$
$$y_t - 3y_{t-1} = 2$$

Opšti oblik partikularnog rešenja je:

$$y_t^p = (polinom)^n \cdot c^t \cdot t^s$$

➔ Polinom u našoj jednačini je 2, što je zapravo polinom nultog stepena (bilo šta na nulti stepen je 1, a 2 je konstanta ispred). Znači imamo da je $n = 0$, a to znači da polinom zapisujemo kao a.

➔ U našoj jednačini pored 2 ne stoji ništa, pa sledi da je $c^t = 1^t$, što znači da je $c = 1$.

➔ Koliko iznosi s? Ovo zavisi od vrednosti koje smo dobili za c (sada) i r (u homogenom rešenju).

1) Ukoliko važi da je $r \neq c$, onda je $s = 0$

2) Ukoliko važi da je $r = c$, onda je $s = 1$

U našem slučaju, $c = 1$ dok je $r = 3$, što su različite vrednosti, tako da je $s = 0$.

Kada zamenimo sve ove vrednosti u partikularno rešenje imamo:

$$y_t^p = a \cdot 1^t \cdot t^0 = a$$

U početnu diferencnu jedinačinu, y_t, y_{t-1}... zamenjujemo sa y_t^p i izračunajmo vrednost:

$$a - 3a = 2$$
$$-2a = 2$$
$$a = -1$$

Znači, partikularno rešenje je:

$$y_t^p = a = -1$$

Konačno rešenje diferencne jednačine je zbir homogenog i partikularnog rešenja:

$$y_t = y_t^h + y_t^p$$

Kada zamenimo vrednosti, to je:

$$y_t = c \cdot 3^t - 1$$

Početni uslov zapravo označava vrednost u periodu $t = 0$. Zamenimo da je $t = 0$:

$$y_0 = c \cdot 3^0 - 1$$
$$3 = c - 1$$
$$c = 4$$

c=4 nije samo po sebi rešenje diferencne jednačine! Potrebno je da ga ubacite u rešenje y_t da biste dobili konačno rešenje:

$$y_t = 4 \cdot 3^t - 1$$

Oznaka 24/20
Zadatak br.4

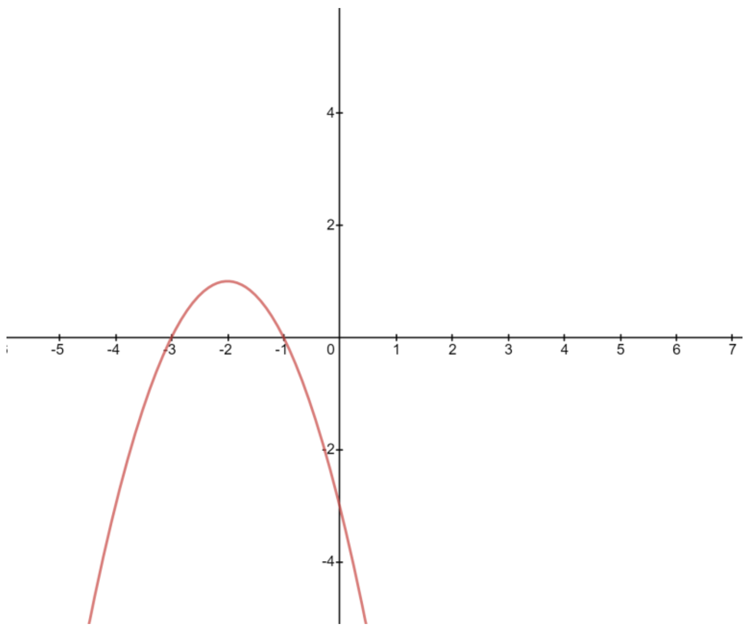
Oblast zadatka:
Ovo je zadatak iz lekcije 19 – Bijekcije (skripta za drugi kolokvijum).

Rešenje:
$c = -2$

Objašnjenje:
Data nam je funkcija:

$$f(x) = -x^2 - 4x - 3$$

Da bismo skicirali ovu funkciju, nađimo njene preseke sa x osom rešavanjem kvadratne jednačine $-x^2 - 4x - 3 = 0$. Rešenja koja dobijamo su -3 i -1. Shodno tome naša funkcija izgleda ovako:



Odmah pronađimo u kojoj tački je funkcija maksimalna. Prvi izvod funkcije je:

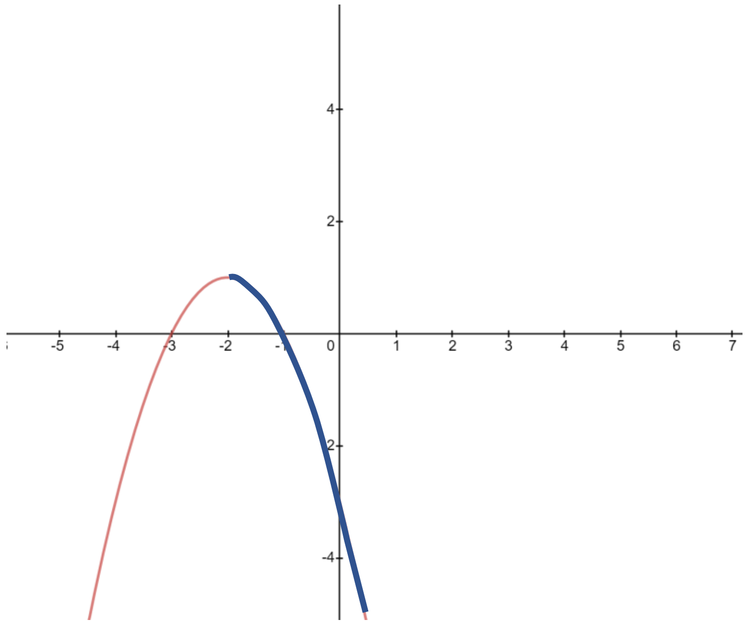
$$f'(x) = -2x - 4$$

Izjednačimo ga sa nulom:

$$-2x - 4 = 0$$
$$-2x = 4$$
$$x = -2$$

Za $x = -2$ dostižemo maksimum. Maksimalna vrednost je $f(-2) = -(-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 3 = -4 + 8 - 3 = 1$.

U zadatku imamo da je kodomen funkcije $(-\infty, 1]$ tako da nemamo skraćen kodomen. Za domen treba da stavimo skup tako da funkcija bude irjektivna, tj. 1-1, što znači da svakoj vrednosti y odgovara samo jedna vrednost x. Da bismo ovo učinili, stavimo da je $c = -2$. Tada, kada je domen $[c, +\infty)$, posmatramo samo podebljani deo funkcije:



Kao što možemo primetiti, sada nemamo više problem da funkcija nije surjektivna, tako da je rešenje $c = -2$.

Zadatak br.9

Oblast zadatka:

Ovo je zadatak iz lekcije 23 – Diferencne jednačine (skripta za drugi kolokvijum) i lekcije 20 – Nizovi (skripta za drugi kolokvijum).

Rešenje:

5

Objašnjenje:

Imamo jednačinu:

$$16y_{t+2} - 24y_{t+1} + 9y_t = 5$$

Opšti oblik linearne diferencne jednačine drugog reda je:

$$my_t + ay_{t-1} + by_{t-2} = q(t)$$

Odavde lako uočavamo da je $m = 16, a = -24, b = 9$ i $q(t) = 5$.

Prvo treba da izračunamo homogeno rešenje ove diferencne jednačine. Ovo činimo tako što zapisujemo karakterističnu jednačinu oblika:

$$mr^2 + ar + b = 0$$

Zamenimo vrednosti za m i a kako bismo izračunali r_1 i r_2:

$$16r^2 - 24r + 9 = 0$$
$$r = \frac{3}{4}$$

S obzirom da imamo jedinstveno rešenje, homogeno rešenje je sledećeg oblika:

$$y_t^h = r^t(c_1 + tc_2)$$

Kada zamenimo vrednost za r to je:

$$y_t^h = \left(\frac{3}{4}\right)^t (c_1 + tc_2)$$

Nakon što smo izračunali homogeno rešenje jednačine, potrebno je da izračunamo partikularno rešenje jednačine. Posmatrajmo diferencnu jednačinu u nešto drugačijem obliku (te poredimo opšti oblik i našu jednačinu):

$$my_t + ay_{t-1} + by_{t-2} = (polinom)^n \cdot c^t$$
$$16y_t - 24y_{t-1} + 9y_{t-2} = 5$$

Opšti oblik partikularnog rešenja je:

$$y_t^p = (polinom)^n \cdot c^t \cdot t^s$$

➔ Polinom u našoj jednačini je 5, što je zapravo polinom nultog stepena (bilo šta na nulti stepen je 1, a 5 je konstanta ispred). Znači imamo da je $n = 0$, a to znači da polinom zapisujemo kao a.

➔ U našoj jednačini pored petice ne stoji ništa, pa sledi da je $c^t = 1^t$, što znači da je $c = 1$.

➔ Koliko iznosi s? Ovo zavisi od vrednosti koje smo dobili za c (sada) i r (u homogenom rešenju).

1) Ukoliko važi da je $r \neq c$, onda je $s = 0$

2) Ukoliko važi da je $r = c$, onda je $s = 1$

U našem slučaju, $c = 1$ dok je $r = \frac{3}{4}$, što su različite vrednosti, tako da je $s = 0$.

Kada zamenimo sve ove vrednosti u partikularno rešenje imamo:

$$y_t^p = a \cdot 1^t \cdot t^0 = a$$

U početnu diferencnu jedinačinu, y_t, y_{t-1}... zamenjujemo sa y_t^p i izračunajmo vrednost:

$$16y_t - 24y_{t-1} + 9y_{t-2} = 5$$

$$16a - 24a + 9a = 5$$
$$a = 5$$

Znači, partikularno rešenje je:

$$y_t^p = a = 5$$

Konačno rešenje diferencne jednačine je zbir homogenog i partikularnog rešenja:

$$y_t = y_t^h + y_t^p$$

Kada zamenimo vrednosti, to je:

$$y_t = y_t^h = \left(\frac{3}{4}\right)^t (c_1 + tc_2) + 5$$

Granična vrednost ovoga je:

$$\lim_{t\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^t (c_1 + tc_2) + 5 = 5$$

Zadatak br.10

Oblast zadatka:

Ovo je zadatak iz lekcije 20 – Nizovi (skripta za drugi kolokvijum).

Rešenje:

$a)\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(3^{\frac{2}{\sqrt{n}}} - 1\right) = ln9$

$b)\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3+\sqrt{n}} = 1$

Objašnjenje:

(a) Za rešavanje ovog limesa koristimo sledeći važni limes:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = lna$$

Imamo izraz:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(3^{\frac{2}{\sqrt{n}}} - 1\right)$$

Prebacimo koren iz n u imenilac. Kada ovo učinimo ovaj član postaje $\frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{\frac{2}{\sqrt{n}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

Pomnožimo i imenilac i brojilac celog izraza sa 2:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2\left(3^{\frac{2}{\sqrt{n}}}-1\right)}{\frac{2}{\sqrt{n}}}$$

Konstanta može izaći ispred limesa:

$$2\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{\frac{2}{\sqrt{n}}}-1}{\frac{2}{\sqrt{n}}}$$

Konačno možemo primeniti važni limes i doći do finalnog rešenja:
$= 2ln3 = ln9$

(b) Za ovo koristimo važan limes:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^y = e^{xy}$$

Tako da imamo:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3+\sqrt{n}} = e^{\frac{2}{n}\cdot(3+\sqrt{n})} = e^{\frac{6+2n^{\frac{1}{2}}}{n}} = e^{\frac{6}{n}+\frac{2}{\sqrt{n}}}$$

Kada pustimo da n teži beskonačnosti, dobićemo nulu u eksponentu, te imamo:
$e^0 = 1$

Zadatak br.11

Oblast zadatka:

Ovo je zadatak iz lekcije 21 – Redovi (skripta za drugi kolokvijum).

Rešenje:

Na osnovu poredbenog kriterijuma i rezultata da je:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}+2}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

zaključujemo da zadati red konvergira.

Objašnjenje:

Za ispitivanje konvergencije ovog reda koristićemo poredbeni kriterijum – poredićemo red sa hiperharmonijskim redom (koji konvergira). Hiperharmonijski red je:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Granična vrednost odnosa zadatog reda i hiperharmonijskog reda je:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}+2}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(n^{\frac{1}{2}}+2\right)}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{5}{2}}+2n^2}{n^2+1}$$

Podelimo i brojilac i imenilac sa najvećim stepenom, $n^{\frac{5}{2}}$:

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{5}{2}}+2n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{n^{1/2}}}{\frac{1}{n^{1/2}}+\frac{1}{n^{5/2}}}$$

Kada pustimo da n teži beskonačnosti, imamo da je:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{n^{\frac{1}{2}}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}} = 1$$

Na osnovu poredbenog kriterijuma i rezultata da je:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{n^{\frac{1}{2}}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}} = 1$$

zaključujemo da zadati red konvergira.