Lekcija 7: Redovi

Pregled lekcije

U okviru ove lekcije imaćete priliku da naučite sledeće:

- **redovi sa pozitivnim članovima** – šta predstavljaju i šta znači konvergencija;
- **poredbeni kriterijum** – jedan od kriterijuma za utvrđivanje konvergencije redova;
- **Dalamberov kriterijum** – jedan od kriterijuma za utvrđivanje konvergencije redova;
- **Košijev koreni kriterijum** – jedan od kriterijuma za utvrđivanje konvergencije redova;
- **potreban uslov za konvergenciju reda;**
- **kolokvijumske trikove za zadatke iz ove oblasti** – obrađene su i brojne „fore" koje su se javljale na kolokvijumima iz prethodnih godina.

Važna napomena

Obavezno prvo pređite lekciju o nizovima (lekcija 6 u ovoj skripti) pre nego što krenete da učite ovu lekciju, jer treba u ovoj lekciji puno limesa da rešavamo, a to smo naučili u lekciji 6.

Redovi sa pozitivnim članovima

Red predstavlja niz brojeva sa znakom operacije za sabiranje između svakog od njih. Na primer, uzmimo ovaj niz brojeva:

1, 3, 5, 7, 9 ...

Ovo predstavlja jedan aritmetički niz gde je prvi član 1, a razlika $d = 2$. Ukoliko se podsetimo gradiva za prvi kolokvijum gde smo detaljno obrađivali ove nizove, imamo da je zbir članova ovog niza:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

Opšti član aritmetičkog niza je:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Zbir svih ovih članova predstavlja jedan red, i to zapisujemo u sledećem obliku:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_1 + (n-1)d)$$

gde je $\sum$ (grčko slovo „sigma") znak za sumu, ispod ovog znaka je „početak", odnosno od kog n počinjemo, a iznad ovog znaka je „kraj", odnosno sa čime završavamo. Redni članovi ovog niza su 1,2,3,4,5... tako da je ovo to n, a niz je beskonačan tako da idemo u $+\infty$.

Ono što vam je ključno za kolokvijum jeste da naučite da utvrdite **da li red konvergira ili divergira.** Šta ovo znači?

1) **Konvergencija** – ukoliko red konvergira, to znači da teži određenoj vrednosti koja je različita od beskonačno, kada n teži beskonačno. U matematičkom zapisu:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = b \neq \infty$$

2) **Divergencija** – ukoliko red divergira, to znači da teži beskonačnosti, kada n teži beskonačno. U matematičkom zapisu:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

U našem primeru aritmetičkog niza, svi brojevi su pozitivni, i uvećavaju se. Logično je da će zbir postajati sve veći, i time kada broj članova teži beskonačnosti, i zbir će težiti beskonačnosti. Drugim rečima, aritmetički niz iz primera divergira.

Ovde smo mogli da dođemo do zaključka odokativno. Međutim, često to nije slučaj (kao što će biti najverovatnije sa redovima na kolokvijumu). Stoga, **koristimo određene kriterijume kako bismo odredili da li dati red konvergira ili divergira.** Svaki kriterijum koristimo u određenim situacijama, a često možemo primeniti i više kriterijuma. Obradimo svaki kriterijum pojedinačno.

1. Poredbeni kriterijum

Osnovna ideja ovog kriterijuma jeste da izaberemo neki red za koji znamo da li divergira ili konvergira, i onda sa njim poredimo zadati red kojem ispitujemo konvergenciju. Kako potom donosimo zaključak?
1) Ukoliko je njihov količnik **različit od 0**, oba reda istovremeno konvergiraju/divergiraju (u zavisnosti da li red koji smo izabrali za poređenje konvergira ili divergira)
2) Ukoliko je njihov količnik **jednak 0**, ne možemo da koristimo ovaj kriterijum za utvrđivanje konvergencije reda

Najčešći redovi koje uzimamo za poređenje su:

1. Harmonijski red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Harmonijski red **divergira** (zbir članova teži beskonačnosti, iako to čini veoma sporo). Koga zanima dokaz ove tvrdnje, može da to pogleda na stranici:
bs.wikipedia.org/wiki/Harmonijski_red_(matematika)

2. Hiperharmonijski red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Hiperharmonijski red **konvergira** (zbir članova ne teži beskonačnosti).

Pogledajmo sada primer zadatka gde koristimo ovaj kriterijum za utvrđivanje konvergencije reda.

Primer 1.
Utvrdite konvergenciju reda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

Vidimo da je najveći stepen u redu 3, tako da predlažemo da izaberemo hiperharmonijski red za poređenje. Stavljamo u odnos dati red i hiperharmonijski red, u pogledu granične vrednosti. Obavezno pišemo da limes teži beskonačnosti (jer upravo time ispitujemo konvergenciju):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^3+1}}{\frac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+1}$$

Kao što smo naučili u lekciji o nizovima, delimo sa najvećim stepenom, što je ovde n^3:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^3}}$$

Kada pustimo da n teži beskonačnosti, dobijamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{1+0} = 1 \neq 0 \to red\ konvergira$$

Ova granična vrednost od 1 je različita od nule, tako da zadati red i hiperharmonijski red istovremeno konvergiraju/divergiraju, na osnovu poredbenog kriterijuma. S obzirom da znamo da hiperharmonijski red konvergira, zaključujemo da zadati red takođe konvergira.

Primer 2.
Utvrdite konvergenciju reda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(2^{\frac{1}{3n^2}} - 1\right)$$

Uzmimo harmonijski red u ovom zadatku za poređenje (jer već imamo jedno n koje će preći dole i postati 1/n, pa kad poredimo sa ovim redom to će postati n^2):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2^{\frac{1}{3n^2}}-1\right)}{\frac{1}{n}}$$

Kada spustimo n u imenilac, ono postaje 1/n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{3n^2}}-1}{\frac{1}{n^2}}$$

Pomnožimo sa 1/3 i imenilac i brojilac, da bismo primenili važan limes (podsetite se lekcije o graničnoj vrednosti niza!):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(2^{\frac{1}{3n^2}}-1\right)}{\frac{1}{3n^2}}=\frac{1}{3}\cdot ln2\neq 0\rightarrow red\ divergira$$

Ova granična vrednost od ln2/3 je različita od nule, tako da zadati red i harmonijski red istovremeno konvergiraju/divergiraju, na osnovu poredbenog kriterijuma. S obzirom da znamo da harmonijski red divergira, zaključujemo da zadati red divergira.

NAPOMENA: SLIČNI VAŽNI LIMESI

Nemojte mešati ove važne limese!

(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=lna$$

(2)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=lna$$

2. Dalamberov kriterijum

Osnovna ideja ovog kriterijuma jeste da u zadati red umesto n zamenimo n+1 (sledeći član niza). Potom ih stavimo u odnos, i na osnovu granične vrednosti ovog odnosa određujemo da li red konvergira ili divergira:

1) Ukoliko je odnos veći od 1, red divergira

2) Ukoliko je odnos manji od 1, red konvergira

3) Ukoliko je odnos jednak 1, ne možemo koristiti ovaj kriterijum za utvrđivanje konvergencije reda

➲ **Ovaj kriterijum često koristimo kada imamo faktorijel u izrazu.**

Primer.
Utvrdite konvergenciju reda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$$

Određujemo graničnu vrednost (n+1)-ti član niza kroz n-ti član niza:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} \cdot n}{3^n(n+1)}$$

Primenimo osnovna pravila za stepene (podsetite se ovoga iz lekcije 7 za prvi kolokvijum!):

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot 3^n \cdot n}{3^n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{(n+1)}$$

Kao i u lekciji o graničnim vrednostima nizova, delimo ovo sa najvećim stepenom, što je ovde n:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{1+\frac{1}{n}}$$

Kada pustimo da n teži beskonačnosti, dobijamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{1+\frac{1}{n}} = 3 > 1 \rightarrow red\ divergira$$

Granična vrednost je veća od 1, tako da na osnovu Dalamberovog kriterijuma zaključujemo da zadati red divergira.

3. Košijev koreni kriterijum

Osnovna ideja ovog kriterijuma jeste dati red stavimo pod n-ti koren. Potom, na osnovu granične vrednosti ovog izraza utvrđujemo da li zadati red konvergira ili divergira:
1) Ukoliko je granična vrednost veća od 1, zadati red divergira
2) Ukoliko je granična vrednost manja od 1, zadati red konvergira
3) Ukoliko je granična vrednost jednaka 1, ne možemo koristiti ovaj kriterijum za utvrđivanje konvergencije reda

➲ **Ovaj kriterijum često koristimo kada imamo neki izraz koji je u celini dignut na neki stepen (n).**

Primer.
Utvrdite konvergenciju reda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2-2}{n^2+1}\right)^n$$

Utvrdimo graničnu vrednost izraza koji je n-ti koren iz datog izraza:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n^2-2}{n^2+1}\right)^n}$$

N-ti koren i n-ti stepen se krate, te dobijamo:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2-2}{n^2+1}\right)$$

Ovo je vrlo jednostavno. Delimo i imenilac i brojilac sa najvećim stepenom (u ovom slučaju n^2):

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}\right)$$

Kada pustimo da n teži beskonačnosti, dobijamo:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}\right) = 3 > 1 \rightarrow red\ divergira$$

Granična vrednost je veća od 1, tako da na osnovu Košijevog korenog kriterijuma zaključujemo da zadati red divergira.

4. Potreban (ali ne i dovoljan) uslov za konvergenciju reda

Neretko u zadacima može da se desi da ne moramo da koristimo nijedan od navedenih kriterijuma za utvrđivanje konvergencije reda, već je **dovoljno da pokažemo da ne važi potreban uslov za konvergenciju, iz čega direktno sledi da red divergira**. Potreban uslov za konvergenciju reda jeste da njegova granična vrednost kada n teži beskonačnosti bude 0:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \rightarrow potreban\ uslov\ za\ konvergenciju\ reda$$

Ukoliko ovo nije zadovoljeno, red automatski divergira!

Primer.
Utvrdite konvergenciju reda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+2}$$

Nemojmo uzeti u obzir ni poredbeni, ni Dalamberov, ni Košijev koreni kriterijum, već izračunajmo graničnu vrednost ovog izraza takvog kakav jeste:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n+2}\right)$$

Standardno, delimo sa najvećim stepenom i dobijamo:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}\right)=\frac{1}{0}=\infty\neq 0\rightarrow red\ divergira$$

Na osnovu ovoga vidimo da potreban uslov za konvergenciju reda nije zadovoljen (jer je granična vrednost izraza različita od nule), tako da zaključujemo da zadati red divergira.

* Fora: Racionalisanje

Ponekad u zadacima je potrebno da izvršite racionalisanje, što je vrlo često slučaj kada imate u izrazu trigonometrijske funkcije. Pogledajmo primer.

Primer.
Utvrdite konvergenciju reda:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-cos\frac{1}{n}\right)$$

Koristimo poredbeni kriterijum i hiperharmonijski red za poređenje (jer kroz racionalisanje će brojilac imati kosinus na kvadrat):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-cos\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

Potrebno je da izvršimo racionalisanje i primenimo trigonometrijski identitet:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-cos\frac{1}{n}\right)\left(1+cos\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}\left(1+cos\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(cos\frac{1}{n}\right)^2}{\frac{1}{n^2}\left(1+cos\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(sin\frac{1}{n}\right)^2}{\frac{1}{n^2}\left(1+cos\frac{1}{n}\right)}$$

Odvojimo koristan deo za važan limes:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^2\frac{1}{\left(1+cos\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}1\frac{1}{\left(1+cos\frac{1}{n}\right)}$$

Pustimo sada da n teži beskonačnosti:

$$\lim_{n\to\infty}1\frac{1}{(1+cos0)}=\frac{1}{2}\neq 0\rightarrow red\ konvergira$$

Ova granična vrednost od 1/2 je različita od nule, tako da zadati red i hiperharmonijski red istovremeno konvergiraju/divergiraju, na osnovu poredbenog kriterijuma. S obzirom da znamo da hiperharmonijski red konvergira, zaključujemo da zadati red takođe konvergira.

NAPOMENA: SLIČNI VAŽNI LIMESI

Nemojte mešati ove važne limese!

(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$$

(2)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$$