Lekcija 4: Relacije

Pregled lekcije

U okviru ove lekcije imaćete priliku da naučite sledeće:

- **relacije** – šta predstavljaju i zbog čega su značajne;
- **osnovne osobine relacija** – refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost;
- **relacije ekvivalencije i relacije poretka** – šta predstavljaju i koja je razlika;
- **klase ekvivalencije** – šta predstavljaju i kako se određuju u zadacima.

Relacije

Relacije se odnose na određene veze između elemenata. Najčešće ćemo ih označavati kao skup uređenih parova ρ (grčko slovo „ro“). Na primer:

$$\rho = \{(2,1),(2,5),(3,1),(2,4)\}$$

Binarna relacija ρ je definisana kao skup četiri uređena para - $(2,1),(2,5),(3,1),(2,4)$ (binarna je jer imamo veze između po dva elementa). Zapravo ova relacija predstavlja Dekartov proizvod određenih nepraznih skupova A i B, pa je relacija matematički definisana kao:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \ \wedge \ y \in B\}$$

što znači da je definisana kao skup uređenih parova (x,y) koji su takvi da x pripada skupu A i da y pripada skupu B.

Nećemo vas zamarati ovim, jer to nije toliko bitno za kolokvijum. Ono što je mnogo bitnije da naučimo za kolokvijum jesu **osobine relacija.**

Osnovne osobine relacija

Postoje četiri osnovne osobine relacija koje moramo dobro da naučimo:
1. Refleksivnost
2. Simetričnost
3. Antisimetričnost
4. Tranzitivnost

Obradimo svaku od ovih osobina detaljnije.

1. Refleksivnost

Refleksivnost se odnosi na to kada je element u relaciji sam sa sobom. Matematički zapis:
$\forall x \in A$ (za svako x koje pripada skupu A) ➔ $(x \, \rho \, x)$ (x je u relaciji sa x)

Primer.
$(2\ \rho\ 2)$

Grafički:

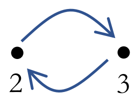
Ovakav grafički prikaz relacije naziva se **strelasti dijagram**. Na njega treba da se priviknete jer ćemo ga gotovo uvek koristiti u kolokvijumskim i ispitnim zadacima.

2. Simetričnost

Simetričnost se odnosi na sledeće - kada je prvi element u relaciji sa drugim elementom, da je onda i drugi element u relaciji sa prvim elementom. Matematički zapis:
$\forall x, y \in A$ (za svako x,y koje pripada skupu A) ➔ $(x\ \rho\ y) \to\ (y\ \rho\ x)$

Primer.
$(2\ \rho\ 3) \to\ (3\ \rho\ 2)$

Grafički:

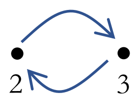


3. Antisimetričnost

Antisimetričnost se odnosi na sledeće - kada je prvi element u relaciji sa drugim elementom, i kada je drugi element u relaciji sa prvim elementom, sledi da su ovi elementi jednaki.
$\forall x, y \in A$ (za svako x,y koje pripada skupu A) ➔ $(x\ \rho\ y)\ \wedge\ (y\ \rho\ x) \to\ x = y$

Primer.
$(2\ \rho\ 2) \wedge (2\ \rho\ 2) \to\ 2 = 2$

Grafički:



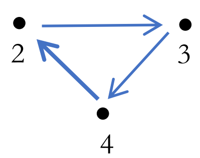
ovo je simetrično, **sve što ne izgleda ovako je antisimetrično!** (što nema povratnu strelicu)

4. Tranzitivnost

Tranzitivnost se odnosi na to kada je prvi element u relaciji sa drugim elementom, i kada je drugi element u relaciji sa trećim elementom, sledi da je prvi element u relaciji sa trećim elementom.
$\forall x, y, z \in A, (x\ \rho\ y)\ \wedge\ (y\ \rho\ z) \to\ (x\ \rho\ z)$

Primer.
$(2\ \rho\ 3)\ \wedge\ (3\ \rho\ 4) \to\ (2\ \rho\ 4)$

Grafički:



Važne relacije

1) Ukoliko je relacija RST (refleksivna, simetrična i tranzitivna) naziva se **relacija ekvivalencije.**
2) Ukoliko je relacija RAT (refleksivna, antisimetrična i tranzitivna) naziva se **relacija poretka.**

Pogledajmo nekoliko primera kolokvijumskih zadataka.

Primer 1.
Neka je $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $\rho \subseteq A^2$ (ovo samo znači da se odnosi na binarnu relaciju) je data sa $\rho = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3)\}$. Odrediti skup ρ_1 sa najmanjim brojem uređenih parova tako da $\rho \cup \rho_1$ bude relacija ekvivalencije u skupu A.

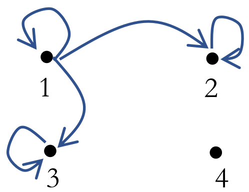
U svakom zadatku, elementi su nam dati kroz skup (direktno kao u ovom zadatku, ili kroz neki opis skupa). Ovde imamo da je:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

Takođe u svakom zadatku imamo i skup ρ. Ona je ovde takođe data direktno, te imamo:

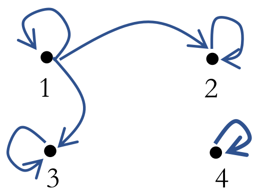
$$\rho = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3)\}$$

U ovakvim tipovima zadataka traži se najčešće najmanji broj uređenih parova (koje stavljamo u skup ρ_1) tako da bi se zadovoljila određena osobina relacija za zajednički skup, $\rho \cup \rho_1$. Uvek, nakon što smo utvrdili skup elemenata A i uređene parove skupa ρ, crtamo strelasti dijagram i označavamo svaku relaciju iz ρ:

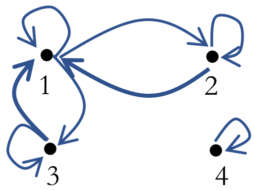


Kada smo ovo završili, onda gledamo da li treba da dopunimo nešto na ovaj strelasti dijagram tako da dobijemo ono što se traži u zadatku – konkretno ovde, da imamo relaciju ekvivalencije, tj. da imamo osobine RST (refleksivnost, simetričnost, tranzitivnost). Ispitajmo svaku osobinu pojedinačno.

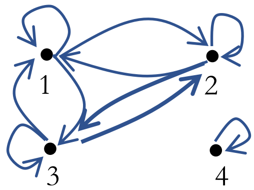
1. Refleksivnost – da li je ρ refleksivno? Nije, jer u skupu nemamo uređeni par (4,4) – fali nam da je 4 u relaciji sama sa sobom (**svaki** element mora biti u relaciji sam sa sobom da bi ro bilo refleksivno!!!). Stoga, da bismo imali refleksivnost, dodajemo (4,4):



2. Simetričnost – da li je ρ simetrično? Nije, jer očigledno fali „povratna strelica“ kod elemenata 1 i 3, kao i kod elemenata 1 i 2. Potrebno je dodamo uređeni par (3,1) i (2,1):



3. Tranzitivnost – da li je ρ tranzitivno? Nije, jer očigledno fali „uzajamna veza“ između elemenata 2 i 3, s obzirom da imamo ove veze između 1 i 3, i 2 i 1. Potrebno je dodamo uređeni par (2,3) i (3,2):



Dakle, ukoliko dodamo sve ove uređene parove u naš skup, onda relacija zadovoljava refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost, te je relacija ekvivalencije. Ovo dodajemo skupu ρ tako što formiramo $\rho \cup \rho_1$, gde je:

$$\rho_1 = \{(4,4), (3,1), (2,1), (2,3), (3,2)\ \}$$

Ovo je upravo i zapis konačnog rešenja našeg zadatka.

Primer 2.
Neka je $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $\rho \subseteq A^2$ (ovo samo znači da se odnosi na binarnu relaciju) je data sa $\rho = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3)\ \}$. Odrediti skup ρ_1 sa najmanjim brojem uređenih parova tako da $\rho \cup \rho_1$ bude relacija poretka u skupu A.

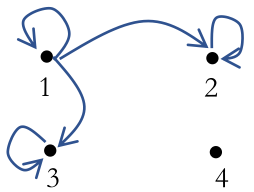
U svakom zadatku, elementi su nam dati kroz skup (direktno kao u ovom zadatku, ili kroz neki opis skupa). Ovde imamo da je:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

Takođe u svakom zadatku imamo i relaciju ρ. Ona je ovde takođe data direktno, te imamo:

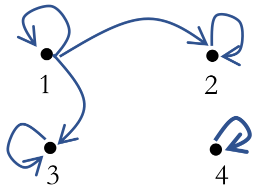
$$\rho = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3)\ \}$$

U ovakvim tipovima zadataka traži se najčešće najmanji broj uređenih parova (koje stavljamo u ρ_1) tako da bi se zadovoljila određena osobina relacija za zajednički skup, $\rho \cup \rho_1$. Uvek, nakon što smo utvrdili skup elemenata A i uređene parove skupa ρ, crtamo strelasti dijagram i označavamo svaku relaciju iz ρ:

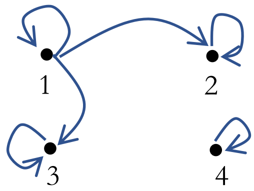


Kada smo ovo završili, onda gledamo da li treba da dopunimo nešto na ovaj strelasti dijagram tako da dobijemo ono što se traži u zadatku – konkretno ovde, da imamo relaciju poretka, tj. da imamo osobine RAT (refleksivnost, antisimetričnost, tranzitivnost). Ispitajmo svaku osobinu pojedinačno.

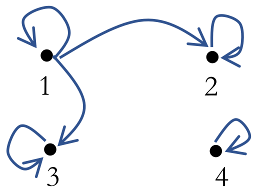
1. Refleksivnost – da li je ρ refleksivno? Nije, jer u skupu nemamo uređeni par (4,4) – fali nam da je 4 u relaciji sama sa sobom (**svaki** element mora biti u relaciji sam sa sobom da bi ro bilo refleksivno!!!). Stoga, da bismo imali refleksivnost, dodajemo uređeni par (4,4):



2. Antisimetričnost – da li je ρ antisimetrično? Jeste, jer očigledno nigde nemamo uzajamne strelice između dva elementa, a da to nije element sa samim sobom. Stoga, relaciju ostavljamo takvu kakva jeste (ne treba da dodajemo nikakve uređene parove):



3. Tranzitivnost – da li je ρ tranzitivno? Jeste, jer nemamo nigde da nam fali treća veza, pošto su strelice od 1 ka 3 i od 1 ka 2 odvojene. Ovo možete proveriti „ručno“, kretanjem iz određene tačke pa proveravanjem da li fali određena veza za tranzitivnost. Znači, ne treba da dodajemo nikakve uređene parove i relacija ostaje kakva jeste:



Dakle, ukoliko dodamo uređeni par (4,4) u naš skup, onda relacija zadovoljava refleksivnost, antisimetričnost i tranzitivnost, te je relacija poretka. Ovo dodajemo skupu ρ tako što formiramo $\rho \cup \rho_1$, gde je:

$$\rho_1 = \{(4,4)\}$$

Klase ekvivalencije

Klase ekvivalencije kod relacija predstavljaju određene „grupe“ elemenata koji se međusobono „druže“. Najlakše je ih odrediti na osnovu strelastog dijagrama. Pogledajmo primer.

Primer 1.
Neka je $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $\rho \subseteq A^2$ je data sa
$\rho = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (2,4), (4,1), (4,2), (3,3), (4,4)\}$. Odrediti **klase ekvivalencije** u relaciji ρ.

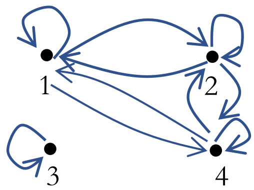
U svakom zadatku, elementi su nam dati kroz skup (direktno kao u ovom zadatku, ili kroz neki opis skupa). Ovde imamo da je:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

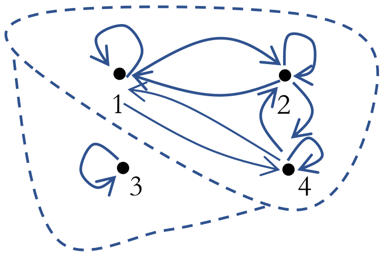
Takođe u svakom zadatku imamo i relaciju ρ. Ona je ovde takođe data direktno, te imamo:

$$\rho = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (2,4), (4,1), (4,2), (3,3), (4,4)\}$$

Prikažimo sve ove relacije na strelastom dijagramu:



Podelimo naš strelasti dijagram u grupe elemenata koji se „druže“ i one koji se ne „druže“:



Klasu ekvivalencije označavamo sa C_1, gde C označava klasu (eng. class), a jedinica u indeksu označava element za koji utvrđujemo sa kojim elementima se „druži“. Vrednost ove klase ekvivalencije predstavlja skup svih elemenata koji su u „istom društvu“. Jedinica je u „istom društvu“ sa 2 i 4, tako da je:

$$C_1 = \{1, 2, 4\}$$

Umesto C_1, možemo koristiti i alternativni zapis klase ekvivalencije:

$$1/\rho = \{1, 2, 4\}$$

Drugu klasu ekvivalencije označavamo sa C_2, gde C označava klasu (eng. class), a dvojka u indeksu označava element za koji utvrđujemo sa kojim elementima se „druži“. Vrednost ove klase ekvivalencije predstavlja skup svih elemenata koji su u „istom društvu“. Dvojka je u „istom društvu“ sa 1 i 4, tako da je:

$$C_2 = \{1, 2, 4\}$$

Umesto C_2, možemo koristiti i alternativni zapis klase ekvivalencije:

$$2/\rho = \{1, 2, 4\}$$

Treću klasu ekvivalencije označavamo sa C_3, gde C označava klasu (eng. class), a trojka u indeksu označava element za koji utvrđujemo sa kojim elementima se „druži“. Vrednost ove klase ekvivalencije predstavlja skup svih elemenata koji su u „istom društvu“. Trojka je u „istom društvu“ samo sa samom sobom, tako da je:

$$C_3 = \{3\}$$

Umesto C_3, možemo koristiti i alternativni zapis klase ekvivalencije:

$$3/\rho = \{3\}$$

Četvrtu klasu ekvivalencije označavamo sa C_4, gde C označava klasu (eng. class), a četvorka u indeksu označava element za koji utvrđujemo sa kojim elementima se „druži". Vrednost ove klase ekvivalencije predstavlja skup svih elemenata koji su u „istom društvu". Četvorka je u „istom društvu" sa 1 i 2, tako da je:

$$C_4 = \{1, 2, 4\}$$

Umesto C_4, možemo koristiti i alternativni zapis klase ekvivalencije:

$$4/\rho = \{1, 2, 4\}$$

Primer 2.
Neka je $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $\rho \subseteq A^2$ data sa je data sa $(\forall x, y \in A)(x\rho y \leftrightarrow 2|x - y)$.
Odrediti klasu ekvivalencije $3/\rho$.

U svakom zadatku, elementi su nam dati kroz skup (direktno kao u ovom zadatku, ili kroz neki opis skupa). Ovde imamo da je:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Takođe u svakom zadatku imamo i relaciju ρ. Ona ovde **nije** data direktno, već kroz opis:

$$(\forall x, y \in A)(x\rho y \leftrightarrow 2|x - y)$$

Kako ovo čitamo? „Za svako x i y koje pripada skupu A, relacija x ro y je ekvivalentna sa izrazom da 2 deli (x-y)". Drugim rečima, skup naših relacija obuhvata sve kombinacije elemenata x,y koji zadovoljavaju uslov $2|x - y$. A šta znači ovaj uslov, da „2 deli (x-y)?". Jednostavno, ovo znači da je (x-y) deljivo sa 2. Proverimo za koje uređene parove (x,y) važi da je njihova razlika (x-y) deljiva sa 2:

<u>Kombinacije sa 1:</u>
$2|1 - 1 = 2|0$ → 0 jeste deljivo sa 2, tako da **ubrajamo uređeni par (1,1)**
$2|1 - 2 = 2|-1$ → -1 nije deljivo sa 2, tako da ne ubrajamo uređeni par (1,2)
$2|1 - 3 = 2|-2$ → -2 jeste deljivo sa 2, tako da **ubrajamo uređeni par (1,3)**
$2|1 - 4 = 2|-3$ → -3 nije deljivo sa 2, tako da ne ubrajamo uređeni par (1,4)
$2|1 - 5 = 2|-4$ → -4 jeste deljivo sa 2, tako da **ubrajamo uređeni par (1,5)**

<u>Kombinacije sa 2:</u>
$2|2 - 1 = 2|1$ → 1 nije deljivo sa 2, tako da ne ubrajamo uređeni par (2,1)
$2|2 - 2 = 2|0$ → 0 jeste deljivo sa 2, tako da **ubrajamo uređeni par (2,2)**
$2|2 - 3 = 2|-1$ → -1 nije deljivo sa 2, tako da ne ubrajamo uređeni par (2,3)
$2|2 - 4 = 2|-2$ → -2 jeste deljivo sa 2, tako da **ubrajamo uređeni par (2,4)**
$2|2 - 5 = 2|-3$ → -3 nije deljivo sa 2, tako da ne ubrajamo uređeni par (2,5)

<u>Kombinacije sa 3:</u>
$2|3 - 1 = 2|2$ → 2 jeste deljivo sa 2, tako da **ubrajamo uređeni par (3,1)**
$2|3 - 2 = 2|1$ → 1 nije deljivo sa 2, tako da ne ubrajamo uređeni par (3,2)

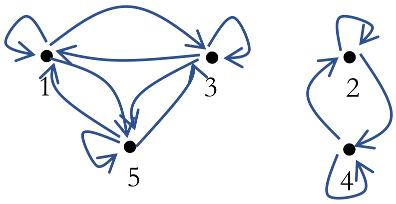
$2|3-3=2|0$ → 0 jeste deljivo sa 2, tako da **ubrajamo uređeni par (3,3)**
$2|3-4=2|-1$ → -1 nije deljivo sa 2, tako da ne ubrajamo uređeni par (3,4)
$2|3-5=2|-2$ → -2 jeste deljivo sa 2, tako da **ubrajamo uređeni par (3,5)**

Kombinacije sa 4:
$2|4-1=2|3$ → 3 nije deljivo sa 2, tako da ne ubrajamo uređeni par (4,1)
$2|4-2=2|2$ → 2 jeste deljivo sa 2, tako da **ubrajamo uređeni par (4,2)**
$2|4-3=2|1$ → 1 nije deljivo sa 2, tako da ne ubrajamo uređeni par (4,3)
$2|4-4=2|0$ → 0 jeste deljivo sa 2, tako da **ubrajamo uređeni par (4,4)**
$2|4-5=2|-1$ → -1 nije deljivo sa 2, tako da ne ubrajamo uređeni par (4,5)

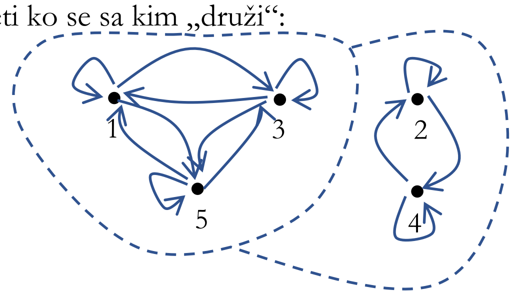
Kombinacije sa 5:
$2|5-1=2|4$ → 4 jeste deljivo sa 2, tako da **ubrajamo uređeni par (5,1)**
$2|5-2=2|3$ → 3 nije deljivo sa 2, tako da ne ubrajamo uređeni par (5,2)
$2|5-3=2|2$ → 2 jeste deljivo sa 2, tako da **ubrajamo uređeni par (5,3)**
$2|5-4=2|1$ → 1 nije deljivo sa 2, tako da ne ubrajamo uređeni par (5,4)
$2|5-5=2|0$ → 0 jeste deljivo sa 2, tako da **ubrajamo uređeni par (5,5)**

Konačno, možemo da zapišemo skup relacija:
$\rho = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),(4,4),(5,1),(5,3),(5,5)\}$

Nacrtajmo strelasti dijagram:



Lako je uvideti ko se sa kim „druži“:



Treću klasu ekvivalencije označavamo sa C_3, gde C označava klasu (eng. class), a trojka u indeksu označava element za koji utvrđujemo sa kojim elementima se „druži“. Vrednost ove klase ekvivalencije predstavlja skup svih elemenata koji su u „istom društvu“. Trojka je u „istom društvu“ sa 1 i 5, tako da je:

$$C_3 = \{1, 3, 5\}$$

Umesto C_3, možemo koristiti i alternativni zapis klase ekvivalencije:

$$3/\rho = \{1, 3, 5\}$$

Lekcija 5: Bijekcije

Pregled lekcije

U okviru ove lekcije imaćete priliku da naučite sledeće:

- **domen i kodomen funkcije** – šta predstavljaju i zašto su bitni;
- **injektivne i surjektivne funkcije** – šta predstavljaju i koja je razlika između njih;
- **bijekcije** – šta predstavljaju i zašto su značajne;
- **kolokvijumske trikove za zadatke iz ove oblasti** – obrađene su i brojne „fore“ koje su se javljale na kolokvijumima iz prethodnih godina.

Domen i kodomen funkcije

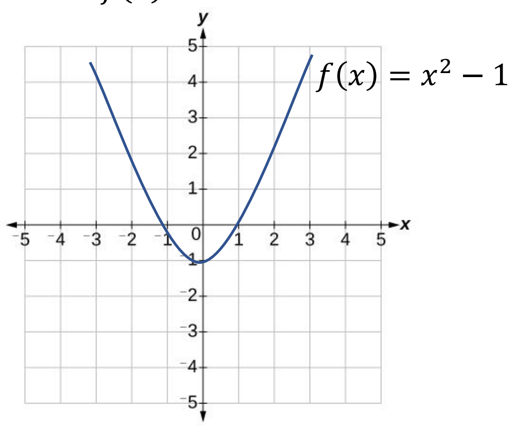
Pre nego što definišemo pojam bijekcije, potrebno je da vidimo šta predstavlja domen, a šta kodomen funkcije.

1. Domen funkcije

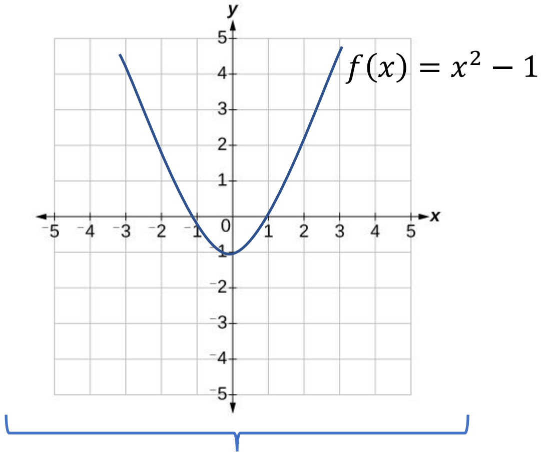
Domen funkcije $f(x)$ odnosi se na vrednosti promenljive x za koje je funkcija $f(x)$ definisana.

Primer.

$$f(x) = x^2 - 1$$



Domen (koji označavamo sa D) predstavlja sve vrednosti x za koje je definisana funkcija. Kao što vidimo sa grafikona, ove vrednosti se protežu od $-\infty$ do $+\infty$ (praktično, gledamo x osu tj. gde na x-osi postoji funkcija $f(x)$):



domen $D = (-\infty, +\infty)$

NAPOMENA: IZRAČUNAJTE DEFINISANOST FUNKCIJE

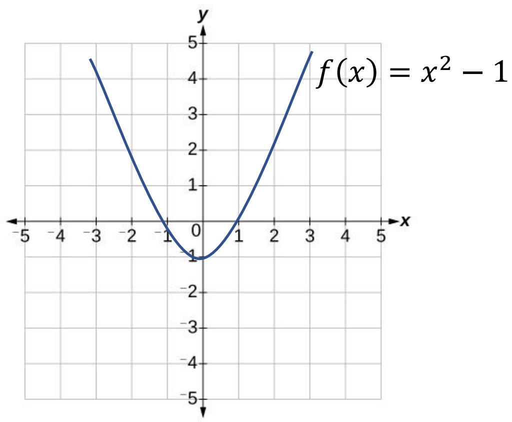
Vrlo je moguće da se na drugom kolokvijumu pojave i zadaci u kojima od vas traže da izračunate definisanost funkcije (što je gradivo za prvi kolokvijum). Sve detaljnije o ovome možete ponoviti iz skripte za prvi kolokvijum na str.21-22.

2. Kodomen funkcije

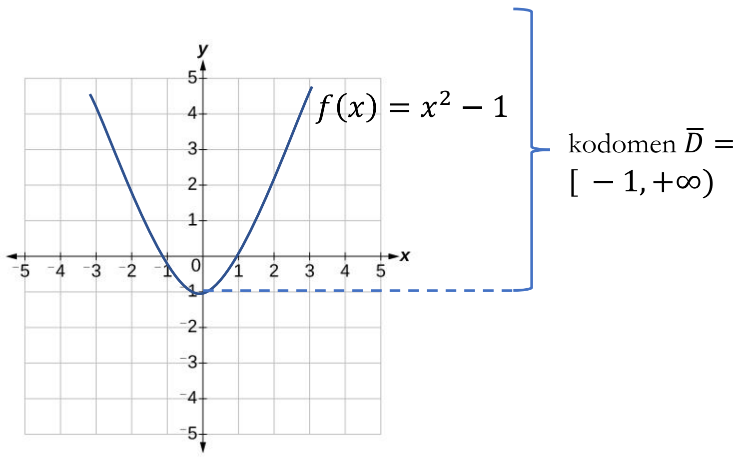
Kodomen funkcije $f(x)$ odnosi se na vrednosti promenljive y za koje je funkcija $f(x)$ definisana.

Primer.

$$f(x) = x^2 - 1$$



Kodomen (koji označavamo sa $\overline{D}$) predstavlja sve vrednosti y za koje je definisana funkcija. Kao što vidimo sa grafikona, ove vrednosti se protežu od -1 do $+\infty$ (praktično, gledamo y osu tj. gde na y-osi postoji funkcija $f(x)$):



Bitno! Da bismo našli kodomen ove funkcije, morali smo precizno skicirati grafik (odrediti minimum pomoću izjednačavanja prvog izvoda sa nulom):

$$f'^{(x)} = 2x = 0 \rightarrow x = 0$$
$$f(0) = 0^2 - 1 = -1$$

Sve ovo možemo prikazati u ovom zapisu:

$$f : \underset{\text{domen}}{\underset{\downarrow}{(-\infty, +\infty)}} \rightarrow \underset{\text{kodomen}}{\underset{\downarrow}{[-1, +\infty)}}$$

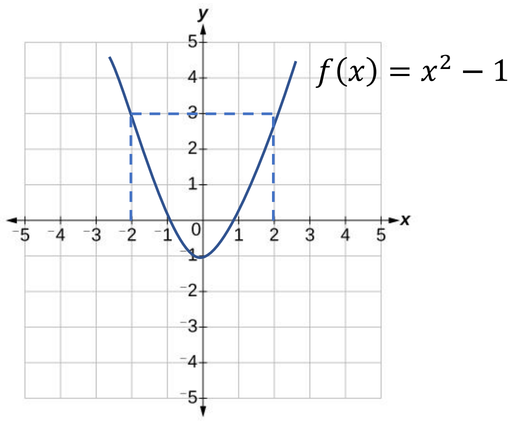
gde je $f(x) = x^2 - 1$.

Injektivne i surjektivne funkcije

Pre nego što definišemo pojam bijekcije, potrebno je da naučimo i šta su injektivne, a šta surjektivne funkcije.

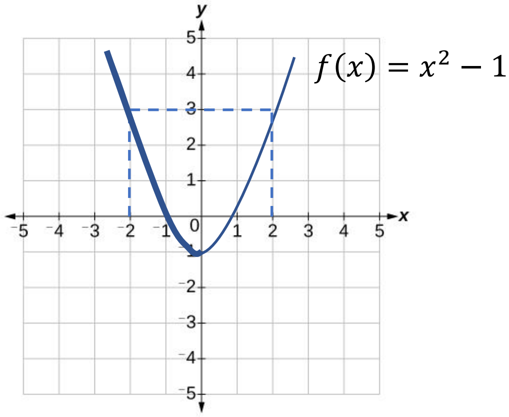
1. Injektivne funkcije (imaju osobinu „1-1")

Injektivna funkcija je ona funkcija za koju ne postoje dve različite vrednosti x koje se preslikavaju u istu vrednost funkcije y. Grafički, uzmimo prethodni primer funkcije, i uzmimo npr. da je $y = 3$:

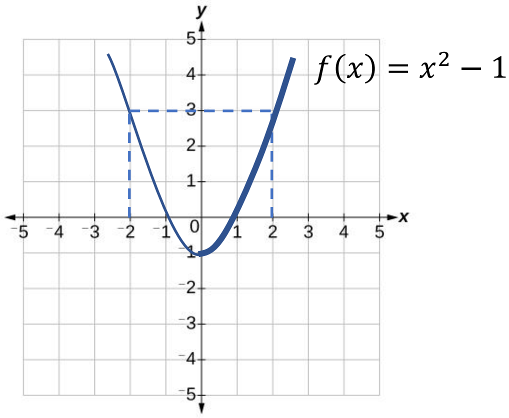


Kao što vidimo, ukoliko je $y = 3$, vrednost promenljive x može da bude -2 ili 2. Znači, imamo dve različite vrednosti x za istu vrednost y, te **ova funkcija nije injektivna (1-1).**

Da bismo učinili da ova funkcija bude injektivna (1-1), treba da posmatramo deo funkcije od $-\infty$ do 0:



Alternativno, možemo da posmatramo i deo funkcije od 0 do $+\infty$:

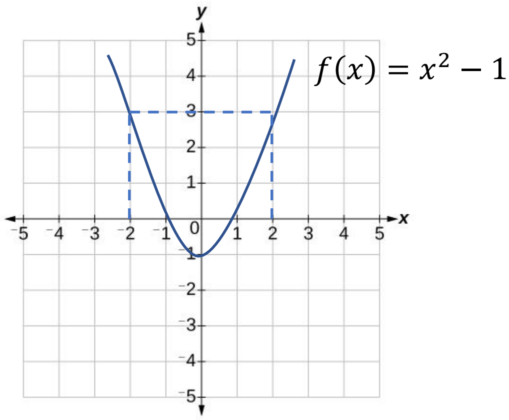


Ovi delovi funkcije su injektivni (1-1).

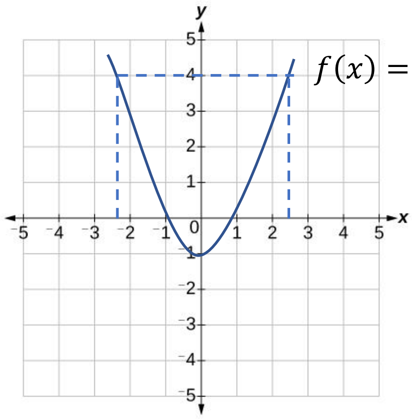
Osobinu injektivnosti takođe nazivamo i **osobina „1-1“** - jednoj vrednosti x odgovara jedna vrednost y!

2. Surjektivne funkcije (imaju osobinu „na“)

Surjektivna funkcija je ona funkcija za koju je svako y iz kodomena moguće preslikati na x-osu, u smislu da postoji x iz domena koje odgovara vrednosti y iz kodomena. Grafički, uzmimo prethodni primer funkcije, i uzmimo npr. da je $y = 3$:



Kao što vidimo, postoji određeno x koje odgovara vrednosti $y = 3$. Uzmimo da je $y = 4$:



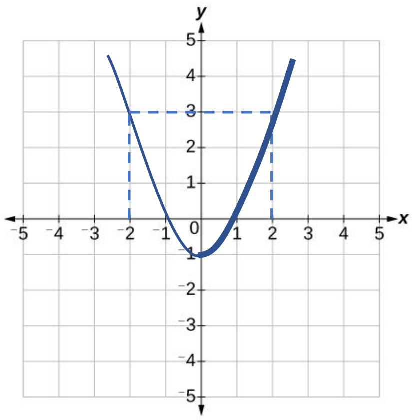
Takođe vidimo da postoji određeno x koje odgovara vrednosti $y = 4$. Ovo važi za svako y iz kodomena ove funkcije, a to je $[-1, +\infty)$. Stoga, ova funkcija je **surjektivna.**

Osobinu surjektivnosti takođe nazivamo i **osobina „na“** – svakoj vrednosti y odgovara neka vrednost x, tj. svako y možemo preslikati **na** x-osu.

➲ Bijekcije

Bijekcije su funkcije koje su istovremeno i injektivne („1-1“) i surjektivne („na“).

Primer.



Podebljana linija je bijekcija koju označavamo kao:

$$f : [0, +\infty) \to [-1, +\infty)$$

gde je $f(x) = x^2 - 1$.

Primeri zadataka

Pogledajmo nekoliko standardnih primera kolokvijumskih zadataka iz ovog dela.

Primer 1.

Odrediti najveću vrednost parametra c za koju funkcija:

$$f : (-\infty, c] \to [2, +\infty)$$

i $f(x) = 2 + (x - 1)^2$ ima osobinu „1-1“.

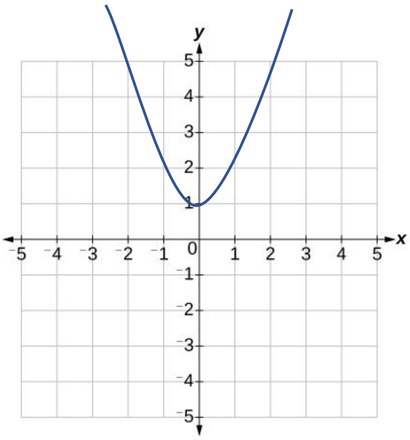
Uvek je u zadacima korisno da prvo nacrtamo grafik funkcije, jer nam on sve govori. Sredimo ovu funkciju, kako bismo dobili standardnu kvadratnu funkciju:

$$f(x) = 2 + (x-1)^2$$
$$f(x) = 2 + x^2 - 2x + 1$$
$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

Sada treba da nađemo preseke ove funkcije sa x-osom, čija je funkcija $y = 0$:

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

Kada ovo krenete da radite, primećete da pod korenom dobijamo negativan broj, što ukazuje na imaginarne brojeve. Stoga, ne postoji x iz skupa realnih brojeva kao rešenje ove jednačine, te zaključujemo da ova funkcija ne seče x-osu. S obzirom da je $a > 0$ što nam govori da se funkcija „smeje“, znamo da je funkcija oblika parabole i u potpunosti iznad x-ose:



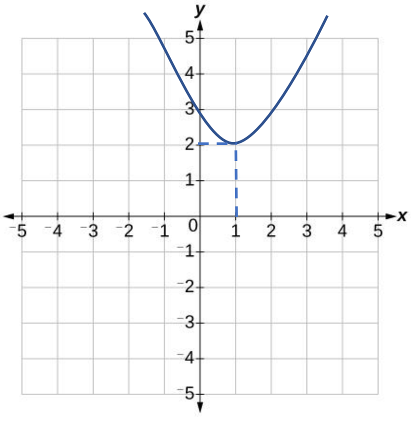
Ovo smo nacrtali otprilike, potrebna nam je još jedna vrlo bitna informacija – gde se nalazi minimum ove funkcije (očigledno sa grafikona, funkcija ima minimum)? Ovo utvrđujemo preko prvog izvoda. Izjednačavamo prvi izvod funkcije sa 0:

$$f'^{(x)} = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$$

Vrednost funkcije za $x = 1$ je:

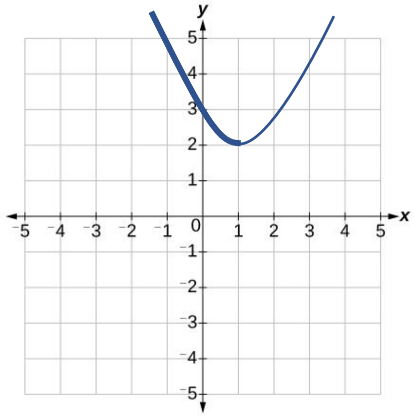
$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 2$$

Sada možemo preciznije nacrtati skicu:



Nakon što smo skicirali grafikon, gledamo **da li se radi o punom domenu/kodomenu.** Domen tražimo, ali proverimo ovo za kodomen. U zadatku je dato da je kodomen $[2,+\infty)$. Ovo smo upravo i dobili kod naše skice, tako da jeste reč o punom kodomenu.

Potom, gledamo šta nam se traži u zadatku. Traži nam se da odredimo domen $(-\infty, c]$ takav da funkcija ima osobinu 1-1, tj. da jednoj vrednosti x odgovara jedna vrednost y (i to najveću moguću vrednost c a da je ovo ispunjeno). S obzirom da je već dato da krećemo od minus beskonačnosti, gledamo dokle možemo da idemo maksimalno a da funkcija ostane 1-1 – možemo da idemo do $x = 1$ a da funkcija ostane 1-1 (injektivna):



Znači, domen treba da bude $(-\infty, 1]$ tako da je rešenje zadatka $c = 1$.

Primer 2.

Odrediti najmanju vrednost parametra c za koju funkcija:

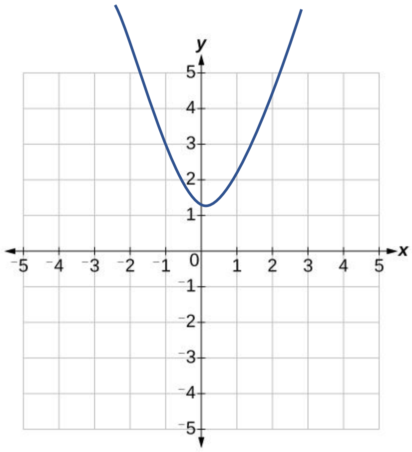
$$f : [0, +\infty) \rightarrow [c,+\infty)$$

i $f(x) = x^2 + 1$ ima osobinu „na“.

Uvek je u zadacima korisno da prvo nacrtamo grafik funkcije, jer nam on sve govori. Imamo datu već kvadratnu funkciju. Sada treba da nađemo preseke ove funkcije sa x-osom, čija je funkcija $y = 0$:

$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -1$$

Ovo je nemoguće – zaključujemo da je ova funkcija uvek pozitivna (1 je uvek pozitivno, a x^2 je takođe uvek pozitivno), te sledi da ova funkcija ne seče x-osu. S obzirom da je $a > 0$ što nam govori da se funkcija „smeje“, znamo da je funkcija oblika parabole i u potpunosti iznad x-ose:



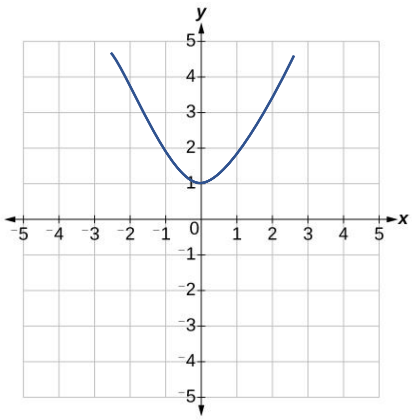
Ovo smo nacrtali otprilike, potrebna nam je još jedna vrlo bitna informacija – gde se nalazi minimum ove funkcije (očigledno sa grafikona, funkcija ima minimum)? Ovo utvrđujemo preko prvog izvoda. Izjednačavamo prvi izvod funkcije sa 0:

$$f'^{(x)} = 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

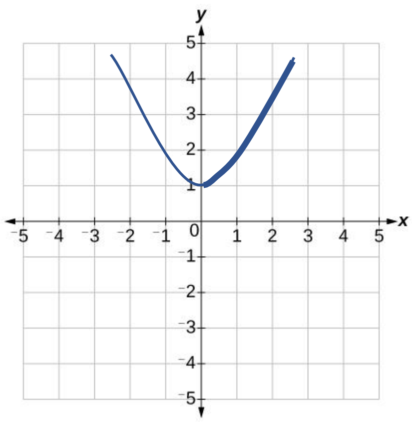
Vrednost funkcije za $x = 0$ je:

$$f(0) = 0^2 + 1 = 1$$

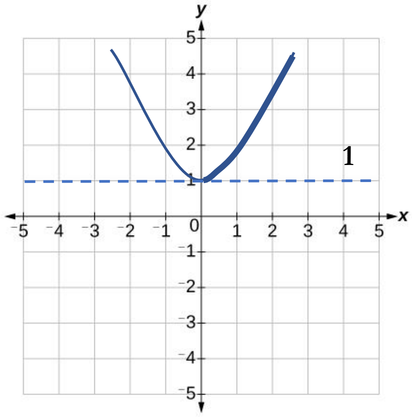
Sada možemo preciznije nacrtati skicu:



Nakon što smo skicirali grafikon, gledamo **da li se radi o punom domenu/kodomenu.** Kodomen tražimo, ali proverimo ovo za domen. U zadatku je dato da je domen $[0, +\infty)$. Znači, nije pun domen i posmatramo samo deo od 0 do plus beskonačnosti:



Potom, gledamo šta nam se traži u zadatku. Traži nam se da odredimo kodomen $[c,+\infty)$ takav da funkcija ima osobinu „na", tj. da se svako y može preslikati na x-osu u određenu vrednost. Ukoliko posmatramo podebljani deo funkcije, vidimo da za ceo kodomen ove linije važi da ona ima osobinu „na", tj. da je surjektivna (jer za bilo koje y možemo naći vrednost x na x-osi). Znači na celom našem kodomenu $[1,+\infty)$ funkcija ima osobinu „na". Koja je najmanja vrednost za c, a da funkcija ima osobinu „na"? To je vrednost 1.



Rešenje zadatka je $c = 1$.

Primer 3.

Odrediti skup B, tako da funkcija:

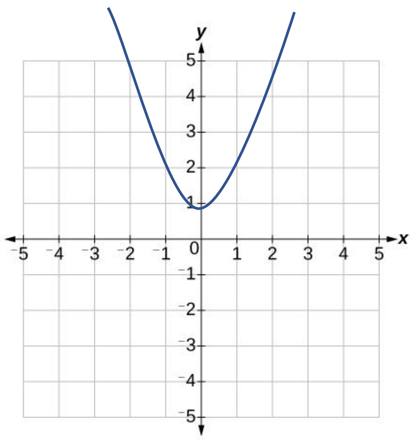
$$f : \mathbb{R} \to B$$

data sa $f(x) = x^2 + x + 1$ ima osobinu „na".

Uvek je u zadacima korisno da prvo nacrtamo grafik funkcije, jer nam on sve govori. Imamo datu već kvadratnu funkciju. Sada treba da nađemo preseke ove funkcije sa x-osom, čija je funkcija $y = 0$:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Ovo je nemoguće (što ćete primetiti, jer kada krenete da rešavate imamo negativan kvadratni koren) te sledi da ova funkcija ne seče x-osu. S obzirom da je $a > 0$ što nam govori da se funkcija „smeje", znamo da je funkcija oblika parabole i u potpunosti iznad x-ose:



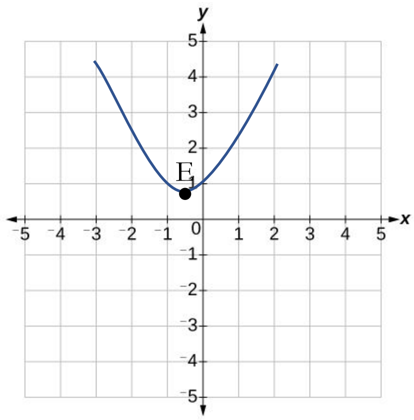
Ovo smo nacrtali otprilike, potrebna nam je još jedna vrlo bitna informacija – gde se nalazi minimum ove funkcije (očigledno sa grafikona, funkcija ima minimum)? Ovo utvrđujemo preko prvog izvoda. Izjednačavamo prvi izvod funkcije sa 0:

$$f'^{(x)} = 2x + 1 = 0 \rightarrow x = -1/2$$

Vrednost funkcije za $x = -1/2$ je:

$$f(-1/2) = (-1/2)^2 - 1/2 + 1 = 3/4$$

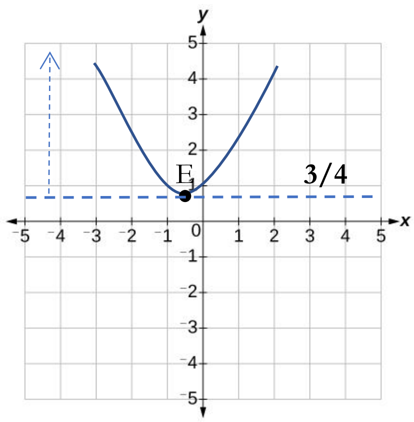
Sada možemo preciznije nacrtati skicu:



tačka E(-1/2, 3/4)

Nakon što smo skicirali grafikon, gledamo **da li se radi o punom domenu/kodomenu.** Kodomen tražimo, ali proverimo ovo za domen. U zadatku je dato da je domen ceo skup realnih brojeva. Zaista, naša funkcija jeste definisana za x od minus do plus beskonačnosti. Stoga, imamo pun domen i posmatramo celu nacrtanu skicu.

Potom, gledamo šta nam se traži u zadatku. Traži nam se da odredimo kodomen B takav da funkcija ima osobinu „na", tj. da se svako y može preslikati na x-osu u određenu vrednost. Za svako y koje je u minimumu ili iznad minimuma ove funkcije, prisutna je osobina „na" (surjektivnost). Znači na celom našem kodomenu funkcija ima osobinu „na". Koji je kodomen ove funkcije?



tačka E(-1/2, 3/4)

Stoga, naš kodomen je $[3/4, +\infty)$

Rešenje zadatka je $B = [3/4, +\infty)$.

Fore za zadatke

Pored osnovnih pravila, potrebno je da imate „keca u rukavu“ za rešavanje zadatka ukoliko primetite da ne možete dobiti rešenje standardnim postupcima. Ovde ćemo prezentovati nekoliko „fora“ koje su se javljale na prethodnim kolokvijuma i kako ih upotrebiti.

Fora #1: Skraćen domen

Ukoliko imamo skraćen domen pratimo standardan postupak rešavanja ovakvih zadataka, ali moramo da pazimo na kraju kada tumačimo grafikon. Ovo će detaljno biti objašnjeno u nastavku na primeru.

Primer.

Odrediti vrednost parametra $a \in \mathbb{R}$ tako da funkcija

$$f : (-\infty, -2] \rightarrow (-\infty, a]$$

zadata sa $f(x) = 9 - (x+1)^2$ bude bijekcija.

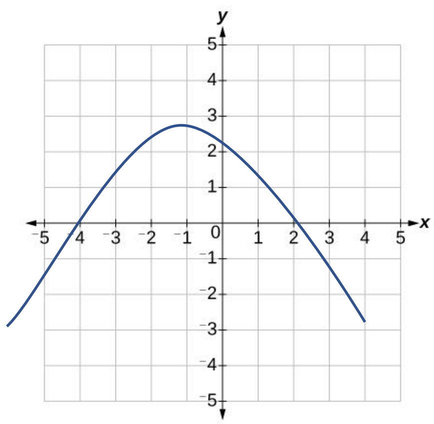
Uvek je u zadacima korisno da prvo nacrtamo grafik funkcije, jer nam on sve govori. Sredimo funkciju kako bismo dobili standardnu kvadratnu:

$$f(x) = 9 - (x+1)^2$$
$$f(x) = 9 - x^2 - 2x - 1$$
$$f(x) = -x^2 - 2x + 8$$

Sada treba da nađemo preseke ove funkcije sa x-osom, čija je funkcija $y = 0$:

$$-x^2 - 2x + 8 = 0$$

Rešenja ove kvadratne jednačine su -4 i 2, što znači da su ovo preseci na x-osi. Takođe, $a < 0$ tako da znamo da je funkcija „tužna“. Crtamo skicu:



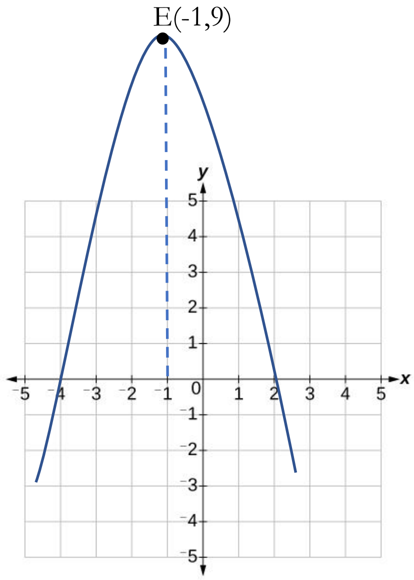
Ovo smo nacrtali otprilike, potrebna nam je još jedna vrlo bitna informacija – gde se nalazi maksimum ove funkcije (očigledno sa grafikona, funkcija ima maksimum)? Ovo utvrđujemo preko prvog izvoda. Izjednačavamo prvi izvod funkcije sa 0:

$$f'^{(x)} = -2x - 2 = 0 \rightarrow x = -1$$

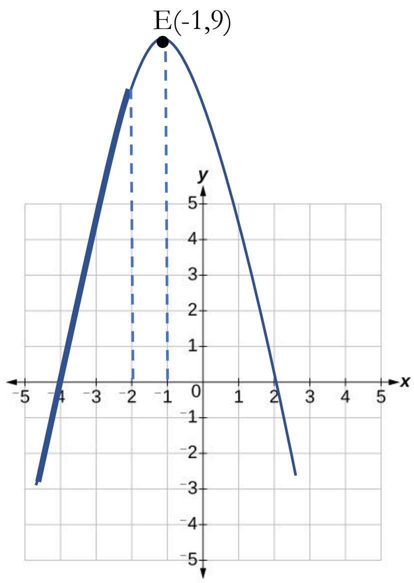
Vrednost funkcije za $x = -1$ je:

$$f(-1) = -(-1)^2 - 2(-1) + 8 = 9$$

Sada možemo preciznije nacrtati skicu:



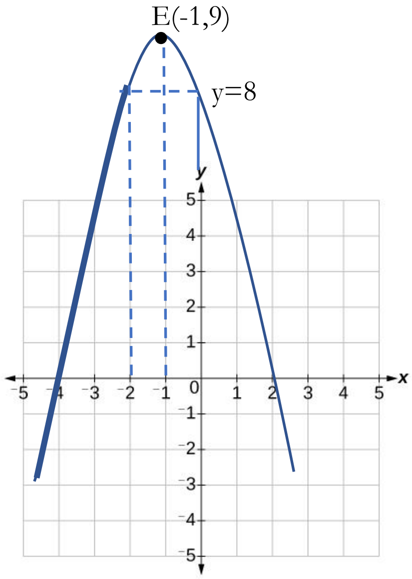
Nakon što smo skicirali grafikon, gledamo **da li se radi o punom domenu/kodomenu.** Kodomen tražimo, ali proverimo ovo za domen. U zadatku je dato da je domen $(-\infty,-2]$. Znači, nije pun domen i posmatramo samo deo do -2.



Potom, gledamo šta nam se traži u zadatku. Traži nam se da odredimo kodomen $(-\infty, a]$ takav da funkcija ima osobinu „na“ i osobinu „1-1 (bude bijekcija). Ukoliko posmatramo podebljani deo funkcije, vidimo da je on svakako ceo bijekcija. Znači na celom našem kodomenu $(-\infty, a]$ funkcija je bijekcija, za dati skraćeni domen. Da bismo utvrdili tačnu vrednost kodomena, potrebno je samo da izračunamo koliko iznosi vrednost funkcije $f(x)$ za $x = -2$. Učinimo ovo tako što ćemo ubaciti $x = -2$ u početnu funkciju:

$$f(-2) = -(-2)^2 - 2(-2) + 8 = 8$$

Grafički ovo vidimo:



Stoga, kodomen naše podebljane linije je:

$$(-\infty, 8]$$

Rešenje zadatka je: $a = 8$.

Fora #2: Skraćen kodomen

Ukoliko imamo skraćen kodomen pratimo standardan postupak rešavanja ovakvih zadataka, ali moramo da pazimo na kraju kada tumačimo grafikon. Ovo će detaljno biti objašnjeno u nastavku na primeru.

Primer.

Odrediti vrednost parametra $a \in \mathbb{R}$ tako da funkcija

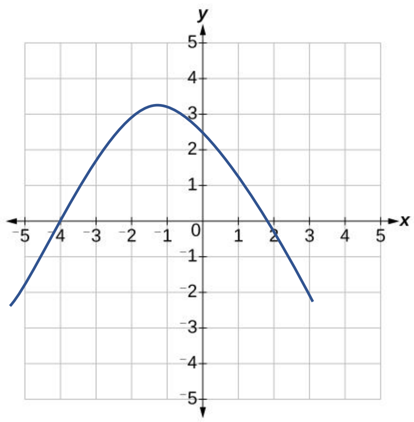
$$f : [a, +\infty) \to (-\infty, 8]$$

zadata sa $f(x) = (2-x)(x+4)$ bude bijekcija.

Uvek je u zadacima korisno da prvo nacrtamo grafik funkcije, jer nam on sve govori. Imamo datu već kvadratnu funkciju (rastavljenu). Sada treba da nađemo preseke ove funkcije sa x-osom, čija je funkcija $y = 0$, a to je očigledno iz funkcije:

$$(2-x)(x+4) = 0 \to x = 2 \; ili \; x = -4$$

Ukoliko bismo izmnožili ove zagrade, videli bismo da je $a < 0$, te imamo funkciju koja je „tužna“. Pravimo skicu:



Ovo smo nacrtali otprilike, potrebna nam je još jedna vrlo bitna informacija – gde se nalazi maksimum ove funkcije (očigledno sa grafikona, funkcija ima maksimum)? Ovo utvrđujemo preko prvog izvoda. Izjednačavamo prvi izvod funkcije sa 0:

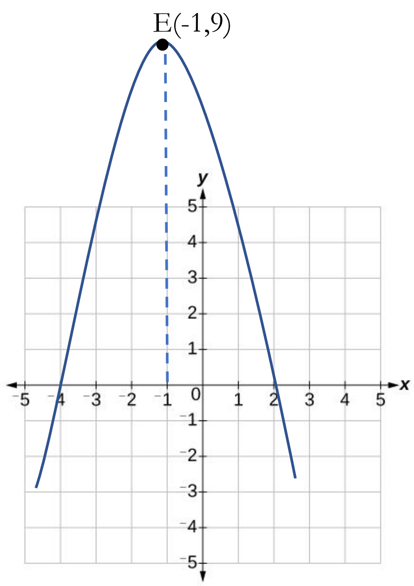
$$f(x) = (2 - x)(x + 4)$$
$$f(x) = 2x + 8 - x^2 - 4x$$
$$f(x) = -x^2 - 2x + 8$$

$$f'^{(x)} = -2x - 2 = 0 \rightarrow x = -1$$

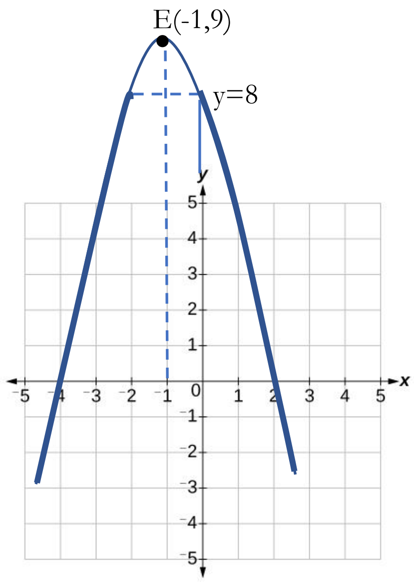
Vrednost funkcije za $x = -1$ je:

$$f(-1) = -(-1)^2 - 2(-1) + 8 = 9$$

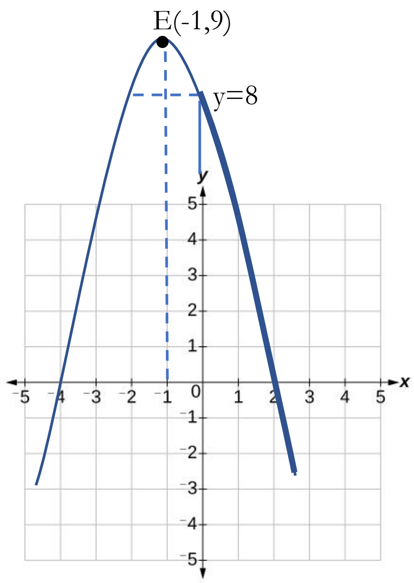
Sada možemo preciznije nacrtati skicu:



Nakon što smo skicirali grafikon, gledamo **da li se radi o punom domenu/kodomenu.** Domen tražimo, ali proverimo ovo za kodomen. Pun kodomen funkcije na našem grafikonu bio bi $(-\infty, 9]$. Međutim, u zadatku je dato da je kodomen $(-\infty, 8]$, što znači da imamo skraćeni kodomen. Grafički, posmatramo sledeći deo funkcije (podebljano):



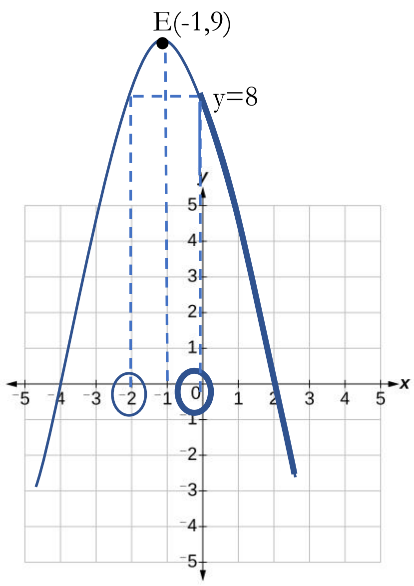
Potom, gledamo šta nam se traži u zadatku. Traži nam se da odredimo domen $[a, +\infty)$ takav da funkcija ima osobinu „na“ i osobinu „1-1 (bude bijekcija). Ukoliko posmatramo podebljani deo funkcije, vidimo da je on **nije ceo bijekcija**, već je potrebno da izaberemo između dva odvojena podebljana dela i posmatramo samo jedan. Koji biramo? Već je dato da domen treba da ide u plus beskonačnost, što vidimo iz zapisa $[a, +\infty)$. Stoga, biramo desnu podebljanu liniju i posmatramo samo nju:



Ova podebljana linija jeste bijekcija. Sada treba da odredimo njen domen $[a, +\infty)$. Posmatramo grafikon. Potrebno je da nađemo koja je vrednost x za $y = 8$. Ubacimo da je $y = 8$ u početnu funkciju:

$$f(x) = -x^2 - 2x + 8$$
$$8 = -x^2 - 2x + 8$$
$$-x^2 - 2x = 0$$
$$-x(x + 2) = 0$$

Dobijamo dva rešenja – da je $x = 0$ i da je $x = -2$, ali samo jedno od njih je rešenje našeg zadatka. Koje? Biramo ono veće (jer je ono više desno, a tu podebljanu liniju posmatramo). Predstavimo ova rešenja grafički da bi bilo jasnije:



Sa grafikona je sada očigledno, kada posmatramo podebljanu liniju, da je njen domen $[0, +\infty)$ tako da je rešenje zadatka $a = 0$.

Fora #3: Nema rešenja

Postoje i određeni slučajevi kada nema rešenja. Pogledajmo primer.

Primer.
Neka je

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

i

$$f : [2, +\infty) \to [3, +\infty)$$

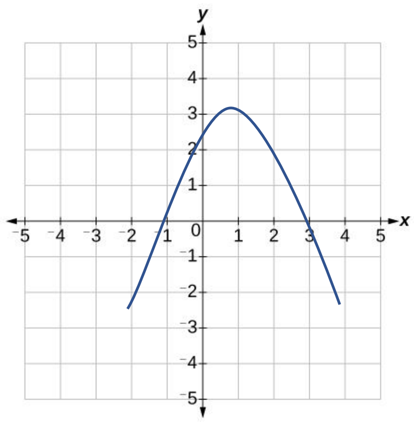
Odrediti inverznu funkciju date funkcije.

Da bismo odredili inverznu funkciju, potrebno je da funkcija (sa zadatim domenom i kodomenom) bude bijekcija, tako da krećemo standardnim postupkom.

Uvek je u zadacima korisno da prvo nacrtamo grafik funkcije, jer nam on sve govori. Imamo datu već direktno datu kvadratnu funkciju Sada treba da nađemo preseke ove funkcije sa x-osom, čija je funkcija $y = 0$, znači da rešimo kvadratnu jednačinu:

$$-x^2 + 2x + 3 = 0$$

Rešenja ove kvadratne jednačine su $x = 3$ i $x = -1$. Takođe imamo da je $a < 0$, te imamo funkciju koja je „tužna“. Pravimo skicu:



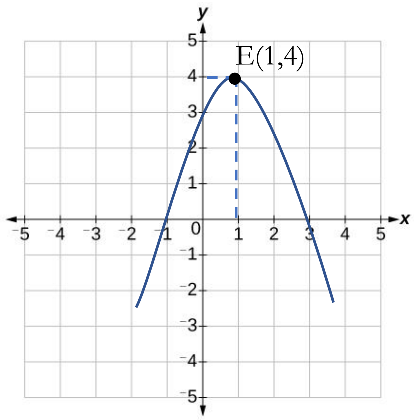
Ovo smo nacrtali otprilike, potrebna nam je još jedna vrlo bitna informacija – gde se nalazi maksimum ove funkcije (očigledno sa grafikona, funkcija ima maksimum)? Ovo utvrđujemo preko prvog izvoda. Izjednačavamo prvi izvod funkcije sa 0:

$$f'^{(x)} = -2x + 2 = 0 \rightarrow x = 1$$

Vrednost funkcije za $x = 1$ je:

$$f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 4$$

Sada možemo preciznije nacrtati skicu:

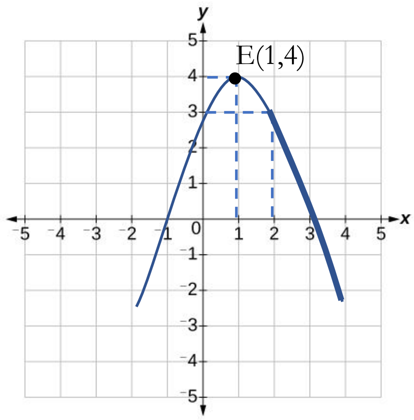


Nakon što smo skicirali grafikon, gledamo **da li se radi o punom domenu/kodomenu.** Na osnovu grafika vidimo da je pun domen od minus beskonačnosti do plus beskonačnosti (odnosno od minus beskonačno do 1, i od 1 do plus beskonačno, ukoliko bismo gledali da imamo osobinu „1-1"). Pun kodomen je od minus beskonačnosti do 4. Nasuprot ovome, u ovom primeru nam je dato sledeće:

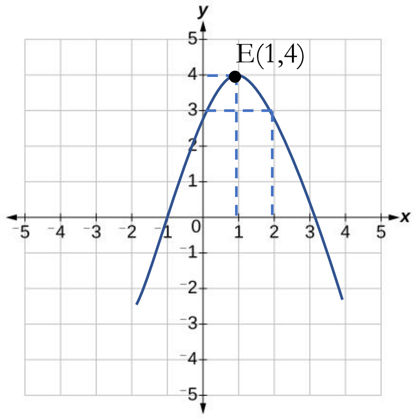
$[2, +\infty)$ je domen

$[3, +\infty)$ je kodomen

Znači, imamo i skraćen domen i skraćeni kodomen. Označimo prvo skraćeni domen na slici podebljanom linijom (kada ubacimo $x = 2$ u početnu funkciju dobijamo $y = 3$):



Sa druge strane, imamo i skraćeni kodomen. Dato nam je da je kodomen $[3, +\infty)$, tako da gledamo samo gornju podebljanu liniju iznad $y = 3$:



Ne vidite ništa podebljano? Tako je! Kada na dati skraćeni domen skratimo i kodomen, ne ostaje ništa od funkcije koju posmatramo. Drugim rečima, **ovako zadata funkcija ne zadovoljava osobinu surjektivnosti, tj. nije „na". Stoga, ovako zadata funkcija nije bijekcija i zaključujemo da zadatak nema rešenja.**