Lekcija 6: Nizovi

Pregled lekcije

U okviru ove lekcije imaćete priliku da naučite sledeće:

- **osnovno pravilo kako se rešava limes** – kada promenljiva teži + beskonačnosti;
- **osnovno pravilo kako se rešava limes** – kada promenljiva teži − beskonačnosti;
- **osnovno pravilo kako se rešava limes** – kada promenljiva teži ± beskonačnosti;
- **osnovno pravilo kako se rešava limes** – kada promenljiva teži konačnom broju;
- **kolokvijumske trikove za zadatke iz ove oblasti** – obrađene su i brojne „fore" koje su se javljale na kolokvijumima iz prethodnih godina.

Uvod

U okviru ove lekcije izučavaćemo granične vrednosti nizova. Kao oznaku za graničnu vrednost primenjivaćemo „lim", što čitamo kao „limes" (od engleske reči „limit" = granica). Ono što je suština, na kolokvijumu ćete dobiti određeni izraz, za koji je potrebno da izračunate graničnu vrednost – kolika je granična vrednost izraza, ukoliko promenljiva x teži određenoj vrednosti? Zapis će biti u sledećem obliku:

$$\lim_{x \to vrednost\ kojoj\ x\ teži}(izraz) = granična\ vrednost\ izraza$$

U nastavku obradićemo širok spektar slučajeva koji mogu doći na kolokvijumu, i kako da svaki od njih rešite. Svaki primer obavezno uradite sami, nakon što ste razumeli suštinu ideje.

Bitno predznanje za zadatke

Za kolokvijumske zadatke iz ove lekcije potrebno je da imate određeno predznanje. Ovde ćemo predstaviti kratki rezime.

1. Binomne formule za kub

Sigurno već odavno znate binomne formule za kvadrat:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$
$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$
$$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$$

U pojedinim zadacima iz ove lekcije bitno je da znate i binomne formule za kub:

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$$
$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$$
$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$
$$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

2. Trigonometrija

U okviru gradiva za prvi kolokvijum naučili smo sledeće trigonometrijske identitete:

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2) $tgx = \frac{sinx}{cosx}$

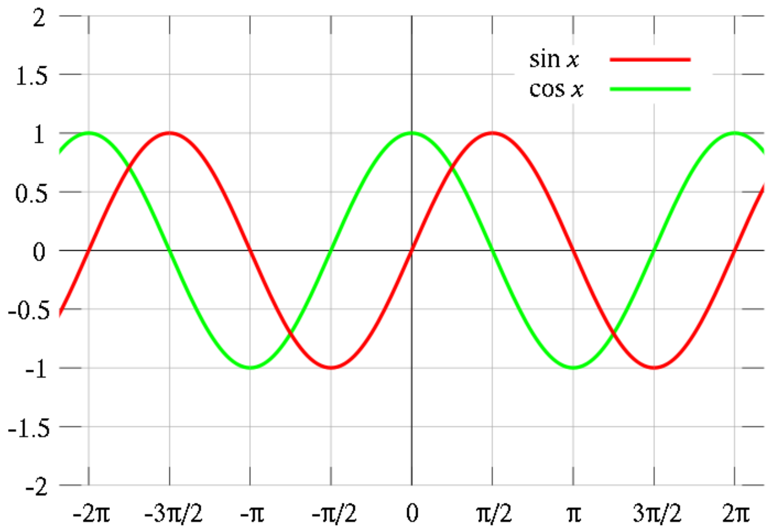
3) $ctgx = \frac{cosx}{sinx}$

Eventualno će nam u pojedinim zadacima za drugi kolokvijum biti potrebne sledeće dve dodatne formule (za sinus i kosinus dvostrukog ugla):

1) $\sin(2x) = 2sinxcosx$

2) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

Takođe, bitno je da se podsetimo da je vrednost sinusa i kosinusa za bilo koji ugao između -1 i 1 (nije beskonačno!). Razlog za ovo leži u obliku ovih trigonometrijskih funkcija:



3. Logaritmi

U okviru logaritama, ono što možda nismo spomenuli eksplicitno u okviru skripte za prvi kolokvijum, a bitno je da znate, jeste sledeće:

1) $\ln x = \log_e x$ (prirodni logaritam ima osnovu broj e)

2) $\ln 0 \rightarrow -\infty$ (prirodni logaritam od nule teži minus beskonačnosti)

Prirodni logaritam ima osnovu e, što je približno 2,72. S obzirom da je ovo veće od 1, gledamo boldovanu liniju sa grafikona. Kada x teži nuli, vrednost cele funkcije teži minus beskonačnosti.

4. „Slabi“ i „jaki“ broj

Ovo je nešto u potpunosti novo, i predstavlja jednu malu „foru“ koja će nam olakšati rešavanje ovakvih zadataka. Suština jeste u sledećem zapisu:

$$2^{+} \text{ i } 2^{-}$$

Kada u eksponentu imamo +, broj posmatramo kao „jaki“ broj. Ovo znači da je prava vrednost broja taj broj **plus** određena vrlo mala vrednost. Drugim rečima, 2^{+} možemo posmatrati kao približno 2,00001. Za potrebe kolokvijuma, najpraktičnije je da posmatrate 2^{+} kao $2+0$, gde nula nije zapravo nula, već neki vrlo mali pozitivni broj.

Po istom principu, 2^{-} možemo posmatrati kao približno 1,99999. Za potrebe kolokvijuma, najpraktičnije je da posmatrate 2^{-} kao $2-0$, gde nula nije zapravo nula, već neki vrlo mali pozitivni broj.

Ovo će nam često biti bitno u zadacima da ne bismo pogrešili predznak beskonačnosti.

5. Neodređeni oblici

Takođe, za tip zadataka iz ove lekcije vrlo je bitno da naučimo šta su neodređeni oblici, a šta nisu. Neodređeni oblici **nisu**:

$$\frac{0}{neki\ broj} = 0$$

$$\frac{\infty}{neki\ broj} = \infty$$

$$\frac{neki\ broj}{\infty} = 0$$

Neodređeni oblici **jesu**:

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, ∞^{0} , 0^{∞}

Osnovno pravilo za zadatke

Osnovno pravilo, bez obzira čemu limes teži, jeste da zamenimo u izraz vrednost kojoj nepoznata teži i proverimo da li dobijamo jedan od neodređenih oblika. Ukoliko dobijemo jedan od neodređenih oblika, dalje nastavljamo rešavanje zadatka. Ukoliko ne dobijemo neodređeni oblik već neku određenu vrednost, zadatak je već rešen – odredili smo konačnu graničnu vrednost izraza.

Primer.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{1/n}-1}{3^{1/n}+1} =$$

Kao što smo rekli u prethodnom pasusu, prvi korak je uvek da zamenimo vrednost kojoj nepoznata teži (u ovom slučaju n teži plus beskonačnosti). Zamenimo ovo u naš izraz:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{1/n}-1}{3^{1/n}+1}=\frac{3^{1/+\infty}-1}{3^{1/+\infty}+1}=\frac{3^0-1}{3^0+1}=\frac{1-1}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

Nismo dobili neodređeni oblik, tako da je zadatak već rešen! +1 poen na drugom kolokvijumu! Granična vrednost izraza kada n teži plus beskonačnosti je 0.

Primer.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-\sqrt{16n^2-n+7}}{3(n+11)}=$$

Zamenimo da n teži plus beskonačnosti u dati izraz.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-\sqrt{16n^2-n+7}}{3(n+11)}=\frac{\infty}{\infty}$$

Ovo je neodređeni oblik, tako da moramo da rešavamo zadatak postupcima koje ćemo naučiti u nastavku ove lekcije.

1. KADA NEPOZNATA TEŽI $+\infty$

U slučaju kada nepoznata teži plus beskonačnosti, da bismo rešili zadatak pravilo jeste da podelimo ceo izraz (i brojilac i imenilac) sa promenljivom **na najveći stepen koji je prisutan u izrazu**. Pokažimo ovo upravo na prethodnom primeru koji nismo rešili jer smo dobili neodređeni oblik.

Primer.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-\sqrt{16n^2-n+7}}{3(n+11)}=$$

Posmatrajmo ovaj izraz. S obzirom da promenljiva teži beskonačnosti, potrebno je da podelimo izraz sa promenljivom na najveći stepen koji je prisutan u izrazu. Koji je najveći stepen? Može nam se učiniti da je u pitanju kvadrat, jer vidimo da postoji n^2 u izrazu. Međutim, obratite pažnju da je ovaj n^2 pod kvadratnim korenom, tako da se i on svodi na prvi stepen. Stoga, potrebno je da podelimo ceo izraz sa n (kada n uđe pod koren postaje n^2):

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-\sqrt{16n^2-n+7}}{3(n+11)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2n}{n}-\sqrt{\frac{16n^2-n+7}{n^2}}}{\frac{3(n+11)}{n}}$$

Kada ovo malo sredimo, dobijamo:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2n}{n}-\sqrt{\frac{16n^2-n+7}{n^2}}}{\frac{3(n+11)}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2-\sqrt{\frac{16n^2-n+7}{n^2}}}{3+\frac{33}{n}}$$

Sada možemo da pustimo da n teži plus beskonačnosti. Od korena samo ostaje koren iz 16, a dole razlomak $\frac{33}{n}$ postaje 0 jer se n sve više uvećava i teži beskonačnosti, te razlomak teži nuli. Dobijamo:

$$\frac{2-\sqrt{16}}{3}=\frac{2-4}{3}=-\frac{2}{3}$$

NAPOMENA: ZAPIS REŠENJA NA KOLOKVIJUMU

Na kolokvijumu je bitno da rešenje ne zapišete ovako samo kao broj, već u punom zapisu: početni izraz + granična vrednost izraza:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-\sqrt{16n^2-n+7}}{3(n+11)}=-\frac{2}{3}$$

2. KADA NEPOZNATA TEŽI NEKOM KONAČNOM BROJU

U slučaju kada nepoznata teži nekom konačnom broju, da bismo rešili zadatak pravilo jeste da pokušamo da **racionališemo izraz** (kako bismo se oslobodili korena). Pokažimo ovo na sledećem primeru:

Primer.

$$\lim_{x\to-1}\frac{4-\sqrt{15-x}}{x+1}=$$

Ukoliko zamenimo $x=-1$ u izraz, dobijamo nula kroz nula, što je neodređeni oblik. Znači moramo da rešavamo zadatak. Pravilo nam kaže da treba da racionališemo izraz. Ovo znači da treba da napravimo razliku kvadrata tamo gde je koren, kako bismo se oslobodili tog korena. U ovom konkretnom slučaju, to znači da pomnožimo brojilac i imenilac sa $4+\sqrt{15-x}$, da bismo mogli primeniti formulu:

$$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$$

Znači:

$$\lim_{x\to-1}\frac{4-\sqrt{15-x}}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{\left(4-\sqrt{15-x}\right)\left(4+\sqrt{15-x}\right)}{(x+1)\left(4+\sqrt{15-x}\right)}$$

Gornji izraz transformišemo koristeći formulu za razliku kvadrata i potom možemo da skratimo $(x-1)$ i $(x-1)$:

$$=\lim_{x\to-1}\frac{16-(15-x)}{(x+1)\left(4+\sqrt{15-x}\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{1+x}{(x+1)\left(4+\sqrt{15-x}\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{\left(4+\sqrt{15-x}\right)}$$

Sada možemo da zamenimo da x teži -1 bez problema i dobijemo graničnu vrednost izraza:

$$\lim_{x\to -1} \frac{1}{\left(4+\sqrt{15-x}\right)} = \frac{1}{(4+4)} = \frac{1}{8}$$

3. KADA NEPOZNATA TEŽI $-\infty$ ILI $\pm\infty$ (ili nekom „slabom" broju)

Jedina razlika u ovom slučaju u odnosu na prvi slučaj jeste da **ispred *parnih* korena moramo da dodamo znak $\pm$.** Na kraju zadatka, ukoliko nepoznata teži $-\infty$ ili nekom „slabom" broju biramo samo *DONJI ZNAK,* a ukoliko teži $\pm\infty$ ostavljamo rešenje kao krajnji rezultat. Pogledajmo sledeće primere:

Primer 1.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{14x^2 - \sqrt{16x^6 - 3x^2 + 2}}{(x^2-3)(-x+2)} =$$

Ukoliko zamenimo $x = \pm\infty$ u izraz, dobijamo beskonačno kroz beskonačno što je neodređeni oblik, tako da pristupamo rešavanju zadatka. Promenljiva teži beskonačnosti tako da znamo da treba da delimo brojilac i imenilac sa najvećim stepenom, što je u ovom slučaju x^3 ($\sqrt{x^6}$):

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{14x^2}{x^3} - \sqrt{\frac{16x^6 - 3x^2 + 2}{x^6}}}{\frac{(x^2-3)(-x+2)}{x^3}} =$$

Obratite pažnju – nepoznata ne teži plus beskonačnosti, već plus minus beskonačnosti. **Zato je neophodno da ispred parnih korena dodamo predznak $\pm$:**

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{14x^2}{x^3} - \left(\pm\sqrt{\frac{16x^6 - 3x^2 + 2}{x^6}}\right)}{\frac{(x^2-3)(-x+2)}{x^3}} =$$

Pustimo da x teži beskonačno sada. U brojiocu ostaje samo $-\left(\pm\sqrt{16}\right)$, a u imeniocu ostaje samo -1. Minus iz brojioca obrće znak $\pm$ u znak $\mp$. Minus iz imenioca ponovo obrće $\mp$ nazad u $\pm$:

$$= \frac{-(\pm 4)}{-1} = \frac{\mp 4}{-1} = \pm 4$$

S obzirom da x teži $\pm\infty$, ovo ostavljamo kao konačno rešenje:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{14x^2 - \sqrt{16x^6 - 3x^2 + 2}}{(x^2-3)(-x+2)} = \pm 4$$

Primer 2.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{14x^2 - \sqrt{16x^6 - 3x^2 + 2}}{(x^2-3)(-x+2)} =$$

Ovaj primer je identičan prethodnom primeru, osim što nepoznata x ne teži $\pm\infty$, već $-\infty$. Postupak za rešavanje zadatka je u potpunosti identičan prethodnom primeru, osim što kada dobijemo rešenje ± 4 **biramo samo donji znak** rešenja, što je ovde minus:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{14x^2-\sqrt{16x^6-3x^2+2}}{(x^2-3)(-x+2)} = -4$$

BITNA NAPOMENA

Ovo dodavanje $\pm$ sprovodimo samo kada su u pitanju **parni** koreni. **Kod neparnih korena nije potrebno ništa dodatno da radimo** – samo primenjujemo osnovno pravilo, da se izraz deli sa najvećim stepenom promenljive.

Fore za zadatke

Pored osnovnih pravila, potrebno je da imate „keca u rukavu" za rešavanje zadatka ukoliko primetite da ne možete dobiti rešenje standardnim postupcima. Ovde ćemo prezentovati nekoliko „fora" koje su se javljale na prethodnim kolokvijuma i kako ih upotrebiti.

Fora #1: „Jaki" i "slabi" brojevi

Krenimo sa lakom forom. U pitanju su zadaci kada nepoznata ne teži „običnom" broju, već taj broj u eksponentu ima + ili -, tzv. „jaki" i „slabi" brojevi koje smo spomenuli u okviru uvoda za ovu lekciju. Zapravo ne postoji posebna strategija rešavanja ovih zadataka, već je samo potrebno da budete svesni šta predstavljaju „jaki" i „slabi" brojevi i da budete pažljivi pri računanju. Pogledajmo primer.

Primer.

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{4x}{1-x^2} =$$

Treba samo da budemo svesni šta predstavlja -1^-. To je:

$$-1^- = -1-0$$

gde je 0 vrlo mali pozitivni broj. -1^- je zapravo isto što i -1, samo ima vrednost malo manju od -1.

Zamenimo ovu vrednost u naš limes:

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{4x}{1-x^2} = \frac{4(-1-0)}{1-(-1-0)^2} = \frac{-4-0}{1-(1-2\cdot(-1)\cdot 0+0)} = \frac{-4-0}{1-(1+0)}$$

Konačno dobijamo:

$$= \frac{-4-0}{1-1-0} = \frac{-4-0}{-0} = \frac{-4{,}00001}{-0} = +\infty$$

Fora #2: Trigonometrija

Kada dobijete neki izraz sa trigonometrijom gde promenljiva teži nekom broju, najčešće ćete rešenje dobiti kroz racionalisanje (standardan postupak kada promenljiva teži nekom broju), ili pak treba da koristite važan limes sa sinusom (više o ovome u kasnijoj fori). Pogledajmo primer sa racionalisanjem.

Primer.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos2x}{x\cdot sinx}=$$

Ukoliko zamenimo nulu u izraz, dobijamo 0/0 što je neodređeni oblik. Pristupamo rešavanju zadatka. S obzirom da vidimo trigonometriju i promenljiva teži nekom broju (najčešće je ovo nula, kao što je upravo slučaj u ovom zadatku), onda racionališemo izraz. Množimo i brojilac i imenilac sa $(1+cos2x)$, da bismo dobili u brojiocu razliku kvadrata:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos2x}{x\cdot sinx}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-cos2x)(1+cos2x)}{(x\cdot sinx)(1+cos2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(cos2x)^2}{(x\cdot sinx)(1+cos2x)}$$

Koristeći osnovne trigonometrijske identitete, pretvaramo brojilac u sledeće:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(sin2x)^2}{(x\cdot sinx)(1+cos2x)}$$

Dalje, možemo da primenimo i formulu za sinus dvostrukog ugla:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2sinxcosx)^2}{(x\cdot sinx)(1+cos2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot(sinx)^2(cosx)^2}{(x\cdot sinx)(1+cos2x)}$$

BITNO! Konstanta može da izađe ispred limesa:

$$=4\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(sinx)^2(cosx)^2}{x\cdot sinx\cdot(1+cos2x)}$$

Možemo skratiti $sinx$:

$$=4\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sinx(cosx)^2}{x(1+cos2x)}=4\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(cosx)^2}{(1+cos2x)}$$

$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}$ je jednak 1 (ovo ćemo objasniti u okviru važnih limesa u kasnijoj fori). U drugi limes dovoljno je da zamenimo da x teži 0:

$$=4\ \frac{(cos0)^2}{(1+cos0)}=\frac{4}{2}=2$$

Konačno rešenje je:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos2x}{x\cdot sinx}=2$$

Fora #3: Važni limesi

U nekim zadacima potrebno je da primenimo važne limese, koje je potrebno da znate napamet (kroz vežbanje ćete ih svakako zapamtiti). Važni limesi su:

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{sinx} = 1$

(ovo smo koristili u prethodnom primeru)

(3) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

(4) $\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg}x}{x} = 1 = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\mathrm{tg}x}$

(5) $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = lna$

(6) $\lim_{x \to 0} (1+x)^y = e^{xy}$

(7) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

(8) $\lim_{x \to \infty} \frac{sinx}{x} = 0$

BITNA NAPOMENA: Obratite pažnju da je veoma bitno da li nepoznata teži beskonačnosti ili nuli. Rezultati nisu isti! Ovo je jedna od najčešćih grešaka koje studenti prave na kolokvijumu i ispitu. Na primer, obratite pažnju:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1 \neq \lim_{x \to \infty} \frac{sinx}{x} = 0$$

U zadacima je ponekad potrebno da direktno primenimo ove limese – međutim, češće je potrebno da „namestimo izraz“ tako da možemo primeniti neki od ovih važnih limesa. Pogledajmo nekoliko primera kako bi nam ovaj princip bio jasniji.

Primer 1.

$$\lim_{n \to 0} \frac{2^{1/n} - 1}{1/n} =$$

U ovom zadatku jednostavno je potrebno da primenimo važni limes br.5:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = lna$$

U našem slučaju, $a = 2$, dok je stepen jednak $1/n.$ Stoga, rešenje je:

$$\lim_{n \to 0} \frac{2^{1/n} - 1}{1/n} = ln2$$

Primer 2.

$$\lim_{n \to 0} n(3^{1/2n} - 1) =$$

Primetimo da je potrebno da primenimo isti važni limes kao u prethodnom primeru. Međutim, pre nego što to učinimo, moramo malo da sredimo izraz u našu korist. $(3^{1/2n} - 1)$ već liči na $a^x - 1$, gde je $a = 3$, a $x = \frac{1}{2n}$. Fali nam imenilac koji bi bio $\frac{1}{2n}$.

Iskoristimo n koje nam je dato. Kada ga prebacimo u imenilac, ono postaje $\frac{1}{n}$:

$$= \lim_{n\to 0} \frac{3^{1/2n} - 1}{\frac{1}{n}}$$

Da bismo dobili u imeniocu 1/2n, potrebno je još da pomnožimo i brojilac i imenilac sa ½ (jednom polovinom):

$$= \lim_{n\to 0} \frac{\frac{1}{2}\left(3^{1/2n} - 1\right)}{\frac{1}{2n}}$$

½ izlazi ispred limesa, i ostaje nam limes na koji možemo da primenimo pravilo:

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to 0} \frac{\left(3^{1/2n} - 1\right)}{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{2} ln3$$

Konačno rešenje je:

$$\lim_{n\to 0} n(3^{1/2n} - 1) = \frac{ln3}{2}$$

Primer 3.

$$\lim_{n\to 0} -2n^2 \ln(1 + \frac{3}{n^2}) =$$

Čim vidimo ln, primetimo da je vredno pokušati da namestimo važni limes br.3:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

$\ln(1 + \frac{3}{n^2})$ svakako već liči na $\ln(1 + x)$ gde je $x = \frac{3}{n^2}$. Fali nam imenilac koji bi bio jednak $\frac{3}{n^2}$. Jednostavno, napravimo ga! Kako? Dodajmo u imeniocu $\frac{3}{n^2}$. **BITNO:** Da ne bismo promenili vrednost izraza, pomnožimo i brojilac sa $\frac{3}{n^2}$. Dobijamo:

$$\lim_{n\to 0} -2n^2 \ln(1 + \frac{3}{n^2}) = \lim_{n\to 0} - 2n^2 \frac{\frac{3}{n^2}\ln(1 + \frac{3}{n^2})}{\frac{3}{n^2}}$$

Možemo da skratimo n^2, kao i da primenimo naš važni limes, pa tada imamo:

$$= \lim_{n\to 0} -6\frac{\ln\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}{\frac{3}{n^2}} = -6$$

Konačno rešenje je:

$$\lim_{n\to 0} -2n^2\ln(1+\frac{3}{n^2}) = -6$$

Primer 4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{x} =$$

Kao što je očigledno, naš izraz veoma liči na važni limes u vezi sinusa:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1$$

x bi u našem slučaju bilo zapravo $3x$. U imeniocu bi nam falilo $3x$ umesto x koje već imamo u izrazu. Stoga, potrebno je da pomnožimo imenilac sa 3. Da bi vrednost izraza ostala nepromenjena, množimo i brojilac sa 3:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{3sin3x}{3x}$$

Trojka kao konstanta može da izađe ispred limesa, i tada možemo da primenimo naš važni limes da bismo direktno dobili rešenje:

$$= 3\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{3x} = 3\cdot 1 = 3$$

Konačno rešenje je:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{x} = 3$$

Fora #4: Faktorijel

Ponekad, u zadacima se javlja faktorijel (!). Znamo šta faktorijel predstavlja:

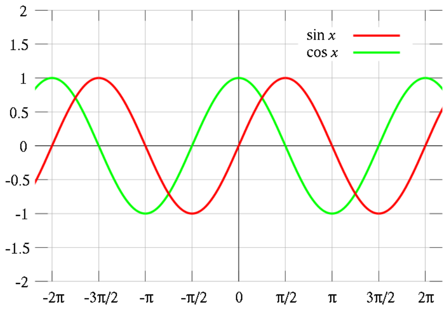
$$n! = n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$$

Pogledajmo jedan primer sa faktorijelom.

Primer.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{cosn!}{2^n} =$$

Ukoliko pustimo da n teži beskonačno, u imeniocu dobijamo beskonačno, jer 2^∞ teži plus beskonačnosti. S druge strane, obratite pažnju: $cosn!$ je praktično $cos\infty$. Bez obzira koliki je ugao (makar i beskonačno), kosinus ne može da bude beskonačno. Podsetimo se funkcije kosinusa:



Vrednost koninusa je UVEK između -1 i 1! Stoga, imamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{cosn!}{2^n} = \frac{nešto\ između - 1\ i\ 1}{+\infty} = 0$$

Konačno rešenje zadatka je:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{cosn!}{2^n} = 0$$

Fora #5: Geometrijski niz

Ponekad u zadacima je potrebno da primenimo i ono što smo naučili za prvi kolokvijum u vezi nizova. Pogledajmo sledeći primer.

Primer.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \cdots + \frac{1}{7^n}\right) =$$

Uočite da je u pitanju geometrijski niz, odnosno zbir članova geometrijskog niza. Ovaj geometrijski niz ima $q = 1/7$. Koristimo formulu za zbir članova geometrijskog niza:

$$S_n = 1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Tako, izraz se transformiše u sledeće:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \cdots + \frac{1}{7^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^n}{1 - \frac{1}{7}}\right)$$

Sada možemo da zamenimo da n teži plus beskonačnosti:

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^\infty}{1 - \frac{1}{7}}$$

$\left(\frac{1}{7}\right)^\infty$ teži nuli, jer je broj koji se stepenuje manji od 1, tako da postaje sve manji i manji kada ga više stepenujemo. Stoga, imamo:

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{7}} = \frac{1}{\frac{6}{7}} = \frac{7}{6}$$

Konačno rešenje je:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \cdots + \frac{1}{7^n}\right) = \frac{7}{6}$$

Fora #6: Lopitalova teorema

Ovo je vrlo koristan trik koji možemo da koristimo kada „zaglavimo" u sređivanju razlomaka. Za ovo će nam, premda, biti potrebno znanje o izvodima. Ukoliko lekcije iz ove skripte niste radili redom, obavezno pređite prvo lekciju 3 o izvodima.

Glavna ideja je: Ukoliko možemo izračunati izvod i iz brojioca i iz imenioca, važi sledeće:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Pogledajmo na sledećem primeru kako nam ovo može pomoći.

Primer.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} =$$

Ukoliko zamenimo da x teži nula, dobijamo neodređeni oblik, pa moramo da rešavamo zadatak. Umesto da pokušavamo da sredimo izraz, uradimo samo prvi izvod brojioca i imenioca:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{1}$$

Sada lako možemo da zamenimo da x teži nuli:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{0+1}}{1} = 1$$

Konačno rešenje je:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Fora #7: Drugi tip zadatka

Umesto da nam u zadatku traže da izračunamo graničnu vrednost izraza, moguće je da nam je data granična vrednost izraza, a da treba da izračunamo čemu teži promenljiva da bismo dobili tu graničnu vrednost. Tada je najbitnije samo da izrazite promenljivu. Pogledajmo sledeći primer.

Primer 1.

$$\lim_{x \to \_\_\_} \frac{1}{x-3} = -\infty$$

Čemu treba da teži x da bismo dobili da je jednakost tačna? Potrebno je samo da izrazimo nepoznatu. Imamo:

$$\frac{1}{x-3} = -\infty$$

Ukoliko prebacimo $(x-3)$ na desnu stranu, a minus beskonačno na levu stranu, dobijamo:

$$\frac{1}{-\infty} = x - 3$$

Prebacimo i 3 na levu stranu. $\frac{1}{-\infty}$ će da postane -0 (broj koji je vrlo malo manji od nule):

$$-0 + 3 = x$$
$$x = 3 - 0 = 3^-$$

Nepoznata treba da teži 3^- da bi jednakost bila zadovoljena. Stoga, konačno rešenje je:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$$

Primer 2.

$$\lim_{x \to \_\_\_} e^{\ 1/(1-x)} = 0$$

Treba da izrazimo nepoznatu x. Imamo:

$$e^{\ 1/(1-x)} = 0$$

Ukoliko ubacimo „ln“ na obe strane, dobijamo:

$$\frac{1}{1-x} = ln0$$

Znamo da je $ln0 = -\infty$ iz teorije o logaritamskoj funkciji (pogledajte uvod u ovu lekciju). Prebacimo $-\infty$ na levu stranu, a $(1-x)$ prebacimo na desnu stranu:

$$1 - x = \frac{1}{-\infty}$$

Kao i u prethodnom zadatku, $\frac{1}{-\infty}$ daje vrlo mali negativni broj, koji obeležavamo kao -0.

$$1 - x = -0$$
$$x = 1 + 0 = 1^+$$

Konačno rešenje zadatka je:

$$\lim_{x \to 1^+} e^{\ 1/(1-x)} = 0$$