Lekcija 11: Analitička geometrija

Pregled lekcije

U okviru ove lekcije imaćete priliku da naučite sledeće:

- **koeficijent pravca (nagib funkcije)** – kako ga određujemo i šta predstavlja, kao i kako preko njega izražavamo paralelne i normalne prave;
- **odsečak funkcije na y-osi** – kako ga određujemo i šta predstavlja;
- **jednačina prave koja prolazi kroz tačke** – kako je određujemo;
- **tačke preseka funkcija** – kako ih određujemo;
- **kružnica** – oblik funkcije, šta je centar a šta poluprečnik i kako ih određujemo.
- **elipsa, hiperbola i parabola**

Uvod

U ovoj lekciji bavimo se analitičkom geometrijom, odnosno raznim stvarima u vezi funkcija u pogledu njihovog skiciranja, određivanja osobina itd. Postoje još neki delovi ove oblasti koje nismo ovde obradili, a koji se dosta ređe javljaju na kolokvijumu (elipsa, hiperbola i parabola). Naznačili smo vam linkove na kojima možete efikasno naučiti i ovaj deo gradiva.

1. Koeficijent pravca (nagib) funkcije i odsečak

Koeficijent pravca, tj. nagib funkcije govori nam, najjednostavnije rečeno, koliko se vrednost Y promeni kada se vrednost X poveća za 1. Označavamo ga sa slovom k, i možemo lako da ga dobijemo iz eksplicitnog oblika linearne funkcije.

Odsečak na y-osi govori nam kolika je vrednost funkcije kada je X = 0. Oznčaavamo ga sa slovom n, i možemo lako da ga dobijemo iz eksplicitnog oblika linearne funkcije.

Dakle, eksplicitni oblik funkcije opšte možemo prikazati sledećim iskazom:

$$y = kx + n$$

BITNA NAPOMENA

Eksplicitni oblik funkcije smo objasnili u lekciji 3, odeljak 3. Obavezno ponovite.
Više o koeficijentu pravca i odsečku na y-osi **obavezno pročitajte u dodatku na vebsajtu koji smo postavili uz lekciju.** Mnogo će vam značiti! (link: skripteekof.com/matematika)

Primer. Imamo funkciju $y = 3x - 2$
Koeficijent pravca iznosi $k = 3$, dok je odsečak na y-osi jednak $n = -2$.

2. Paralelne i normalne prave

Na osnovu koeficijent pravca jedne prave (odnosno linearne funkcije), možemo odrediti i:
a) koliki je koeficijent pravca prave koja je njoj **paralelna**
b) koliki je koeficijent pravca prave koja je **normalna** na nju

Pravilo glasi:
1) **Paralelne** prave imaju **isti** koeficijent pravca.

$$k_1 = k_2$$

2) **Normalne** prave imaju koeficijent pravca **suprotnog znaka i recipročne vrednosti**.

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

Pogledajmo ovo na primerima.

Primer 1.
Imamo funkciju $y = 3x - 2$. Koliko iznosi koeficijent pravca **paralelne** prave na ovu funkciju?
- Koeficijent pravca funkcije $y = 3x - 2$ je $k_1 = 3$. Paralelne prave imaju isti koeficijent nagiba, tako da će i koeficijent pravca paralelne prave biti $k_2 = 3$.

Primer 2.
Imamo funkciju $y = 3x - 2$. Koliko iznosi koeficijent pravca **normalne** prave na ovu funkciju?
- Koeficijent pravca funkcije $y = 3x - 2$ je $k_1 = 3$. Normalne prave imaju koeficijent nagiba suprotnog znaka i recipročne vrednosti, tako da će koeficijent pravca normalne prave biti $k_2 = -\frac{1}{3}$.

3. Jednačina prave koja prolazi kroz tačke

VARIJANTA 1: JEDNAČINA KOJA PROLAZI KROZ DVE TAČKE

Ovo je jedna šablonska stvar, koju je vrlo jednostavno savladati. Potrebno je da zapamtimo formulu:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

x_1 = x koordinata prve tačke
y_1 = y koordinata prve tačke
x_2 = x koordinata druge tačke
y_2 = y koordinata druge tačke

Primer.
Kako glasi jednačina prave koja prolazi kroz tačke A(2,3) i B(1,5)? Ono što je potrebno da uradimo jeste da jednostavno zapišemo podatke koje imamo o koordinatama ovih tačaka i zamenimo ih u formulu.

$x_1 = 2$
$y_1 = 3$
$x_2 = 1$
$y_2 = 5$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
$$y - 3 = \frac{5-3}{1-2}(x - 2)$$

Zatim samo malo sređujemo izraz i prebacujemo ga u eksplicitni oblik:

$$y - 3 = -2(x - 2)$$
$$y - 3 = -2x + 4$$
$$y = -2x + 7$$

VARIJANTA 2: JEDNAČINA KOJA PROLAZI KROZ TAČKU I IMA DATI KOEFICIJENT PRAVCA

Ovo je takođe jedna šablonska stvar, koju je vrlo jednostavno savladati. Potrebno je da zapamtimo formulu:

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

x_1 = x koordinata prve tačke
y_1 = y koordinata prve tačke
k = dati koeficijent pravca

Primer.
Kako glasi jednačina prave koja prolazi kroz tačke A(1,1) i ima koeficijent pravca 3? Ono što je potrebno da uradimo jeste da jednostavno zapišemo podatke koje imamo i zamenimo ih u formulu.

$x_1 = 1$
$y_1 = 1$
$k = 3$

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$
$$y - 1 = 3(x - 1)$$

Zatim samo malo sređujemo izraz i prebacujemo ga u eksplicitni oblik:

$$y - 3 = 3x - 3$$
$$y = 3x$$

4. Tačke preseka funkcija

Ovo je takođe jedna šablonska stvar, koju je vrlo jednostavno savladati. **Koordinate tačke (ili tačaka) preseka funkcija dobijamo kao rešenja sistema jednačina.**

Primer.
Imamo sledeće linearne funkcije:

$$x + 3y = 25$$
$$2x - 5y = -27$$

Koje su koordinate tačke preseka ovih funkcija?

Ovo dobijamo rešavanjem datog sistema jednačina, putem metode zamene ili metodom suprotnih koeficijenata. Dobićete rešenje:

$$x = 4$$
$$y = 7$$

odnosno, tačka preseka datih funkcija je P(4,7).

BITNA NAPOMENA
Više i mnogo detaljnije o odeljku 1-4, kao i brojne primere za vežbu, možete pronaći na sledećem linku:
https://www.youtube.com/playlist?list=PLFcvPzGOoOADCnxqIj_UwhtL8KLY7OM9e
(video 75-87)

5. Kružnica

Određivanje centra i poluprečnika kružnice je jedan od najčešćih zadataka na kolokvijumu iz oblasti analitičke geometrije. Postoji odličan niz videa koje je snimila Škola Rajak u vezi ovoga, i najbolje ćete ih naučiti putem njih.
Link:
https://www.youtube.com/playlist?list=PLFcvPzGOoOADCnxqIj_UwhtL8KLY7OM9e
(video 88 i video 89)

6. Elipsa, hiperbola i parabola

Ove oblasti se mnogo retko javljaju na kolokvijumu, tako da nećemo obraditi u ovoj skripti. Međutim, pružamo vam korisne linkove na kojima možete preći i izvežbati ovo.

- Elipsa, hiperbola i parabola: http://alas.matf.bg.ac.rs/~ml09185/strana3.html#3.4
- Elipsa video: https://youtu.be/JySfTIgWcFo
- Hiperbola video: https://youtu.be/QPAIgB2izj4
- Parabola video: https://youtu.be/7NCVtv7JYW4

Rešeni kolokvijumski zadaci

1. Napiši jednačinu prave koja sadrži tačku A(-3,1) i paralelna je sa sledećom pravom:

$$q: 2x + 3y = 5$$

Rešenje sa postupkom:
Konkretno, zadatak nam je da nađemo jednačinu prave koja prolazi kroz neku tačku i ima koeficijent pravca isti kao i prava q (jer to znači da su ove prave paralelne).
Prebacimo jednačinu prave q u eksplicitni oblik kako bismo lakše utvrdili šta je koeficijent pravca ove funkcije:

$$2x + 3y = 5$$
$$3y = 5 - 2x$$
$$y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x$$
$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

Odavde su očigledni podaci za koeficijent pravca i odsečak na y-osi ove funkcije:

$$k = -\frac{2}{3}$$
$$n = \frac{5}{3}$$

Naša tražena jednačina prave treba da bude paralelna sa ovom pravom, što znači da ima isti koeficijent pravca. Znači, naš zadatak je da utvrdimo jednačinu prave koja prolazi kroz tačku A(-3,1) i ima koeficijent pravca $k = -\frac{2}{3}$. Za to primenjujemo sledeću formulu:

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

x_1 = x koordinata prve tačke
y_1 = y koordinata prve tačke
k = dati koeficijent pravca

Ono što je potrebno da uradimo jeste da jednostavno zapišemo podatke koje imamo i zamenimo ih u formulu.
$x_1 = -3$
$y_1 = 1$
$k = -\frac{2}{3}$

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$
$$y - 1 = -\tfrac{2}{3} \cdot (x + 3)$$

Zatim samo malo sređujemo izraz i prebacujemo ga u eksplicitni oblik:

$$y - 1 = -\tfrac{2}{3}x - 2$$
$$y = -\tfrac{2}{3}x - 1$$

2. Napiši jednačinu prave koja sadrži tačku A(1,3) i normalna je sa sledećom pravom:

$$q: 2x + 3y = 5$$

<u>Rešenje sa postupkom:</u>

Konkretno, zadatak nam je da nađemo jednačinu prave koja prolazi kroz neku tačku i ima koeficijent pravca **recipročne vrednosti i suprotnog znaka** u odnosu na pravu q (jer to znači da su ove prave normalne).

Prebacimo jednačinu prave q u eksplicitni oblik kako bismo lakše utvrdili šta je koeficijent pravca ove funkcije:

$$2x + 3y = 5$$
$$3y = 5 - 2x$$
$$y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x$$
$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

Odavde su očigledni podaci za koeficijent pravca i odsečak na y-osi ove funkcije:

$$k = -\frac{2}{3}$$
$$n = \frac{5}{3}$$

Naša tražena jednačina prave treba da bude normalna na ovu pravu, što znači da ima koeficijent pravca **recipročne vrednosti i suprotnog znaka**. Znači, naš zadatak je da utvrdimo jednačinu prave koja prolazi kroz tačku A(1,3) i ima koeficijent pravca $k = \frac{3}{2}$. Za to primenjujemo sledeću formulu:

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

x_1 = x koordinata prve tačke
y_1 = y koordinata prve tačke
k = dati koeficijent pravca

Ono što je potrebno da uradimo jeste da jednostavno zapišemo podatke koje imamo i zamenimo ih u formulu.

$x_1 = 1$
$y_1 = 3$
$k = \frac{3}{2}$

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$
$$y - 3 = \frac{3}{2} \cdot (x - 1)$$

Zatim samo malo sređujemo izraz i prebacujemo ga u eksplicitni oblik:

$$y - 3 = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$
$$y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

3. Odrediti centar i poluprečnik sledeće kružnice:

$$x^2 + y^2 = -14\text{y} + 15$$

<u>Rešenje sa postupkom:</u>

U ovakvim zadacima, ono što uvek treba da uradimo jeste da svedemo datu jednačinu kružnice na standardni oblik. Standardni oblik kružnice izgleda ovako:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

r = poluprečnik kružnice
a = x-koordinata tačke centra kružnice
b = y-koordinata tačke centra kružnice

Dakle, dođimo do ovog oblika u našem primeru. Prvo prebacimo sve osim slobodnog člana na levu stranu:

$$x^2 + y^2 = -14\text{y} + 15$$
$$x^2 + y^2 + 14\text{y} = 15$$
$$(x - 0)^2 + y^2 + 14\text{y} = 15$$

Nemamo zagradu koja nam je potrebna kod y. Ovo ćemo rešiti tako što ćemo dopuniti naš izraz do „punog kvadrata", kako bismo mogli upotrebiti formulu za kvadrat zbira ili razlike. Znači, imamo $y^2 + 14\text{y}$. Ako bismo ovde dodali $+49$, imali bismo pun kvadrat. Ukoliko ovo učinimo, moramo i da dodamo -49, kako ne bismo promenili vrednost izraza. Znači:

$$(x - 0)^2 + y^2 + 14\text{y} + 49 - 49 = 15$$
$$(x - 0)^2 + (y + 7)^2 - 49 = 15$$
$$(x - 0)^2 + (y + 7)^2 = 15 + 49$$
$$(x - 0)^2 + (y + 7)^2 = 64$$

Odnosno:

$$(x - 0)^2 + (y + 7)^2 = 64$$
$$(x - 0)^2 + (y - (-7))^2 = 64$$

Iz ovakvog izraza su rešenja očigledna:

$$r = 8$$
$$a = 0$$
$$b = -7$$

Dakle, naša kružnica ima poluprečnik od 8, a centar je u tački $C(0, -7)$.

NAPOMENA: KANONSKI OBLIK FUNKCIJE

Kada u ovakvim zadacima sa kružnicom dopunjavamo izraz do „punog kvadrata“, kako bismo imali elemente za kvadrat zbira ili razlike, mi zapravo deo funkcije prebacujemo u tzv. **kanonski oblik.**

Primeri:
1) Eksplicitni oblik funkcije: $y = x^2 + 14x$
2) Implicitni oblik fukcije: $y - x^2 - 14x = 0$
3) Kanonski oblik fukcije: $y = x^2 + 14x + 49 - 49$, tj. $y = (x + 7)^2 - 49$

4. Odrediti centar i poluprečnik sledeće kružnice:

$$x^2 + y^2 = -4x$$

a potom odrediti jednačinu prave koja prolazi kroz centar ove kružnice i tačku A(1,3).

<u>Rešenje sa postupkom:</u>
U ovakvim zadacima, ono što uvek treba da uradimo jeste da svedemo datu jednačinu kružnice na standardni oblik. Standardni oblik kružnice izgleda ovako:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

r = poluprečnik kružnice
a = x-koordinata tačke centra kružnice
b = y-koordinata tačke centra kružnice

Dakle, dođimo do ovog oblika u našem primeru. Prvo prebacimo sve osim slobodnog člana na levu stranu:

$$x^2 + y^2 = -4x$$
$$x^2 + 4x + y^2 = 0$$
$$x^2 + 4x + (y - 0)^2 = 0$$

Nemamo zagradu koja nam je potrebna kod x. Ovo ćemo rešiti tako što ćemo dopuniti naš izraz do „punog kvadrata“, kako bismo mogli upotrebiti formulu za kvadrat zbira ili razlike. Znači, imamo $x^2 + 4x$. Ako bismo ovde dodali $+4$, imali bismo pun kvadrat. Ukoliko ovo učinimo, moramo i da dodamo -4, kako ne bismo promenili vrednost izraza. Znači:

$$x^2 + 4x + 4 - 4 + (y - 0)^2 = 0$$
$$(x + 2)^2 - 4 + (y - 0)^2 = 0$$
$$(x + 2)^2 + (y - 0)^2 = 4$$

Odnosno:

$$(x+2)^2 + (y-0)^2 = 4$$
$$(x-(-2))^2 + (y-0)^2 = 4$$

Iz ovakvog izraza su rešenja očigledna:

$$r = 2$$
$$a = -2$$
$$b = 0$$

Dakle, naša kružnica ima poluprečnik od 2, a centar je u tački $C(-2{,}0)$.

Sada, treba da nađemo jednačinu prave koja prolazi kroz ovaj centar $C(-2{,}0)$ i tačku $A(1{,}3)$.

Potrebno je da primenimo formulu:

$$y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

x_1 = x koordinata prve tačke
y_1 = y koordinata prve tačke
x_2 = x koordinata druge tačke
y_2 = y koordinata druge tačke

Ono što je potrebno da uradimo jeste da jednostavno zapišemo podatke koje imamo o koordinatama ovih tačaka i zamenimo ih u formulu.

$x_1 = -2$
$y_1 = 0$
$x_2 = 1$
$y_2 = 3$

$$y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$
$$y - 0 = \frac{3-0}{1-(-2)}(x-(-2))$$

Zatim samo malo sređujemo izraz i prebacujemo ga u eksplicitni oblik:

$$y = \frac{3}{1+2}(x+2)$$
$$y = \frac{3}{3}(x+2)$$
$$y = x+2$$

5. Odrediti tačke preseka sledećih funkcija:

$$y = 2 - x$$
$$y = x^2 - 7x + 10$$

<u>Rešenje sa postupkom:</u>

Znamo da koordinate tačke (ili tačaka) preseka funkcija dobijamo kao rešenja sistema jednačina. Potrebno je da rešimo sledeći sistem jednačina.

$$y = 2 - x$$
$$y = x^2 - 7x + 10$$

Upotrebimo metod zamene, zamenivši prvu jednačinu u drugu:

$$y = x^2 - 7x + 10$$
$$2 - x = x^2 - 7x + 10$$
$$2 = x^2 - 6x + 10$$
$$0 = x^2 - 6x + 8$$
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Poznatim postupcima iz prethodnih lekcija, rešimo ovu kvadratnu jednačinu:

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1}$$
$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2}$$
$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$
$$\boldsymbol{x_1 = 4}$$
$$\boldsymbol{x_2 = 2}$$

Time smo dobila dva rešenja za x koordinatu naše tačke preseka – znači imamo dve tačke preseka.

<u>Prva tačka preseka</u>

Ako uzmemo da je $x = 4$, računamo sledećim postupkom vrednost koordinate y:

$$y = 2 - x$$
$$y = 2 - 4$$
$$y = -2$$

Dakle, prva tačka preseka jeste tačka:

$$A_1(4, -2)$$

<u>Druga tačka preseka</u>

Ako uzmemo da je $x = 2$, računamo sledećim postupkom vrednost koordinate y:

$$y = 2 - x$$
$$y = 2 - 2$$
$$y = 0$$

Dakle, druga tačka preseka jeste tačka:

$$A_2(2, 0)$$

6. Odrediti centar i poluprečnik sledeće kružnice:

$$x^2 + y^2 = 24 + 2x$$

U ovakvim zadacima, ono što uvek treba da uradimo jeste da svedemo datu jednačinu kružnice na standardni oblik. Standardni oblik kružnice izgleda ovako:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

r = poluprečnik kružnice
a = x-koordinata tačke centra kružnice
b = y-koordinata tačke centra kružnice

Dakle, dođimo do ovog oblika u našem primeru. Prvo prebacimo sve osim slobodnog člana na levu stranu:

$$x^2 - 2x + y^2 = 24$$
$$x^2 - 2x + (y - 0)^2 = 24$$

Nemamo zagradu koja nam je potrebna kod x. Ovo ćemo rešiti tako što ćemo dopuniti naš izraz do „punog kvadrata“, kako bismo mogli upotrebiti formulu za kvadrat zbira ili razlike. Znači, imamo $x^2 - 2x$. Ako bismo ovde dodali $+1$, imali bismo pun kvadrat. Ukoliko ovo učinimo, moramo i da dodamo -1, kako ne bismo promenili vrednost izraza. Znači:

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + (y - 0)^2 = 24$$
$$(x - 1)^2 - 1 + (y - 0)^2 = 24$$
$$(x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 25$$

Iz ovakvog izraza su rešenja očigledna:

$$r = 5$$
$$a = 1$$
$$b = 0$$

Dakle, naša kružnica ima poluprečnik od 5, a centar je u tački $C(1\ ,0)$.

7. Odrediti centar i poluprečnik sledeće kružnice:

$$x^2 + y^2 = 8y - 12$$

<u>Rešenje sa postupkom:</u>
U ovakvim zadacima, ono što uvek treba da uradimo jeste da svedemo datu jednačinu kružnice na standardni oblik. Standardni oblik kružnice izgleda ovako:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

r = poluprečnik kružnice
a = x-koordinata tačke centra kružnice
b = y-koordinata tačke centra kružnice

Dakle, dođimo do ovog oblika u našem primeru. Prvo prebacimo sve osim slobodnog člana na levu stranu:

$$x^2 + y^2 = 8y - 12$$
$$x^2 + y^2 - 8y = -12$$
$$(x - 0)^2 + y^2 - 8y = -12$$

Nemamo zagradu koja nam je potrebna kod y. Ovo ćemo rešiti tako što ćemo dopuniti naš izraz do „punog kvadrata“, kako bismo mogli upotrebiti formulu za kvadrat zbira ili razlike. Znači, imamo $y^2 - 8y$. Ako bismo ovde dodali $+16$, imali bismo pun kvadrat. Ukoliko ovo učinimo, moramo i da dodamo -16, kako ne bismo promenili vrednost izraza. Znači:

$$(x - 0)^2 + y^2 - 8y + 16 - 16 = -12$$
$$(x - 0)^2 + (y - 4)^2 - 16 = -12$$
$$(x - 0)^2 + (y - 4)^2 = -12 + 16$$
$$(x - 0)^2 + (y - 4)^2 = 4$$

Iz ovakvog izraza su rešenja očigledna:

$$r = 2$$
$$a = 0$$
$$b = 4$$

Dakle, naša kružnica ima poluprečnik od 2, a centar je u tački $C(0, 4)$.

8. Odrediti centar i poluprečnik sledeće kružnice:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$$

Rešenje sa postupkom:

U ovakvim zadacima, ono što uvek treba da uradimo jeste da svedemo datu jednačinu kružnice na standardni oblik. Standardni oblik kružnice izgleda ovako:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

r = poluprečnik kružnice
a = x-koordinata tačke centra kružnice
b = y-koordinata tačke centra kružnice

Dakle, dođimo do ovog oblika u našem primeru. Prvo treba da imamo na levoj strani sve nepoznate, a na desnoj strani da imamo samo slobodan član:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = -4$$
$$x^2 - 4x + y^2 + 2y = -4$$

Nemamo zagradu koja nam je potrebna i kod x i kod y. Ovo ćemo rešiti tako što ćemo dopuniti naš izraz do „punog kvadrata“, kako bismo mogli upotrebiti formulu za kvadrat zbira ili razlike.

Za nepoznatu x:

Imamo $x^2 - 4x$. Ako bismo ovde dodali $+4$, imali bismo pun kvadrat. Ukoliko ovo učinimo, moramo i da dodamo -4, kako ne bismo promenili vrednost izraza. Znači:

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 2y = -4$$
$$(x-2)^2 - 4 + y^2 + 2y = -4$$
$$(x-2)^2 + y^2 + 2y = -4 + 4$$
$$(x-2)^2 + y^2 + 2y = 0$$

Za nepoznatu y:

Imamo $y^2 + 2y$. Ako bismo ovde dodali $+1$, imali bismo pun kvadrat. Ukoliko ovo učinimo, moramo i da dodamo -1, kako ne bismo promenili vrednost izraza. Znači:

$$(x-2)^2 + y^2 + 2y + 1 - 1 = 0$$
$$(x-2)^2 + (y+1)^2 - 1 = 0$$
$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0 + 1$$
$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$$

Iz ovakvog izraza su rešenja očigledna:

$$r = 1$$
$$a = 2$$
$$b = -1$$

Dakle, naša kružnica ima poluprečnik od 1, a centar je u tački $C(2, -1)$.

Online test 11: Analitička geometrija

*Detaljnije na: **www.skripteekof.com/matematika***