Lekcija 4: Funkcije dve promenljive

Pregled lekcije

U okviru ove lekcije imaćete priliku da naučite sledeće stavke o funkcijama 2 argumenta:

- **suštinu funkcije dva argumenta** – šta predstavljaju ove funkcije, kako se razlikuju od funkcija jednog argumenta i kako grafički izgledaju;
- **definisanost funkcije dva argumenta** – kako određujemo domen za funkciju dva argumenta;
- **parcijalni izvodi funkcije dva argumenta** – šta predstavljaju i kako se računaju;
- **totalni diferencijal funkcije dva argumenta** – šta predstavlja i kako se računa;
- **aproksimacija funkcije dva argumenta po Tejloru i Maklorenu** – kako ovo radimo kada je u pitanju funkcija dva argumenta, a ne funkcija jednog argumenta kao u lekciji 3.

Funkcije dve promenljive (dva argumenta)

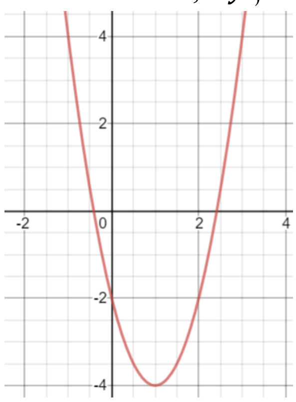
Do sada smo se bavili funkcijama sa jednim argumentom (jednom promenljivom). Naša funkcija je najčešće bila sledećeg oblika:

$$y = f(x)$$

gde je y funkcija jedne promenljive, što je ovde promenljiva x. Na primer:

$$y = 2x^2 - 4x - 2$$

Grafički, ovu funkciju jednog argumenta prikazujemo u koordinatnom sistemu na koji smo navikli, gde imamo dve ose: x je horizontalna osa, a y je vertikalna osa:



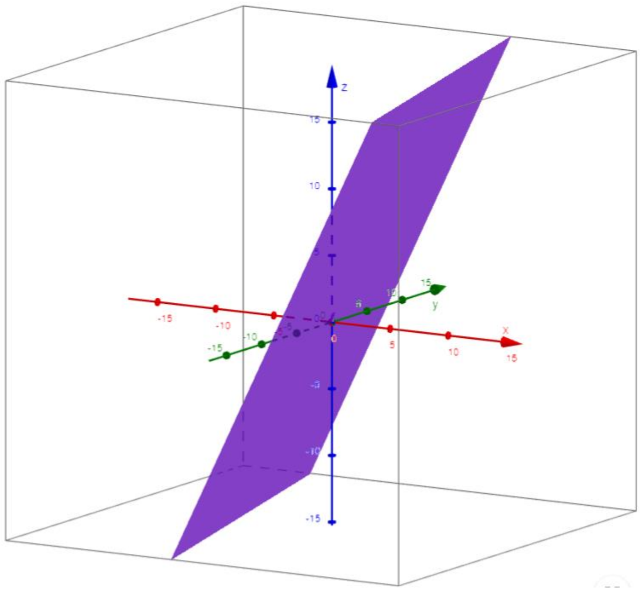
U ovoj lekciji bavićemo se funkcijama koje imaju **dva argumenta (dve promenljive).** Našu funkciju ćemo nazvati funkcija z, i ona je funkcija dva argumenta - x i y:

$$z = f(x, y)$$

Na primer:

$$z = 2x + \frac{1}{2}y$$

Grafički, funkciju dva argumenta bismo prikazivali u koordinatnom sistemu koji ima tri ose – x, y i z osu. Praktično, iz dve dimenzije koje smo imali kod funkcije jednog argumenta prelazimo u tri dimenzije kod funkcija dva argumenta! Naša funkcija iz primera je označena kao osenčena površina na sledećem grafikonu:



Ne brinite – srećom, za predmet Matematika iz prve godine nije potrebno da se bavimo crtanjem niti skiciranjem funkcija dva argumenta, odnosno trodimenzionalnim prostorom.

Ukoliko želite da se igrate da vidite kako izgleda bilo koja funkcija dva argumenta koju zamislite, skenirajte sledeći QR kod preko vašeg pametnog telefona.
Neki telefoni mogu ovo da učine direktno preko kamere, ali je najčešće potrebno da preuzmete neku aplikaciju iz Google Play ili Apple Store za skeniranje QR kodova, kao što je „QR code reader“.

Sada pređimo na ispitivanje određenih osobina funkcija dva argumenta. Ne brinite, ništa nije ni približno komplikovano koliko grafik iznad izgleda!

Definisanost funkcije dva argumenta

Identična pravila za definisanost funkcije dva argumenta važe kao i za definisanost funkcije jednog argumenta – samo je potrebno da krajnje rešenje zapišemo u posebnom obliku. Pogledajmo neke primere.

Primer 1.
Odrediti definisanost funkcije $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$.

Znamo da ono što je pod logaritmom mora da bude veće od nule. Stoga:

$$x^2 + y^2 - 1 > 0$$

$$x^2 + y^2 > 1$$

Rešenje zapisujemo u sledećem obliku:

$$D \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 > 1\}$$

Ovo bismo čitali kao „domen funkcije je skup uređenih parova (x, y) koji pripadaju realnom prostoru $\mathbb{R}^2$, takvih da važi $x^2 + y^2 > 1$“.

Primer 2.

Odrediti definisanost funkcije $z = \frac{1}{\sqrt{xy}}$.

Znamo da imenilac razlomka mora biti različit od nule:

$$\sqrt{xy} \neq 0$$
$$xy \neq 0$$

Takođe znamo da ono pod parnim korenom mora biti veće ili jednako od nule:

$$xy \geq 0$$

Presek ova dva uslova je:

$$xy > 0$$

Rešenje zapisujemo u sledećem obliku:

$$D \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy > 0\}$$

Primer 3.

Odrediti definisanost funkcije $z = \sqrt{lnx + lny}$.

Znamo da ono pod logaritmom mora biti veće od nule:

$$x > 0$$
$$y > 0$$

Takođe, znamo da ono pod parnim korenom mora biti veće ili jednako od nule:

$$lnx + lny \geq 0$$
$$\ln(xy) \geq 0$$
$$\ln(xy) \geq ln1$$
$$xy \geq 1$$

Rešenje zapisujemo u sledećem obliku (gde $\wedge$ označava logički operator za „i“, tj. presek):

$$D \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0 \wedge y > 0 \wedge xy \geq 1\}$$

Parcijalni izvodi funkcije dva argumenta

Parcijalni izvodi odnose se na promenu naše funkcije $z(x,y)$ ukoliko dođe do promene samo jednog argumenta, pod pretpostavkom da drugi argument držimo fiksiranim. **Drugim rečima, naša funkcija ima sledeće parcijalne izvode (prvog reda):**

$\frac{\partial z}{\partial x}$ – parcijalni izvod funkcije z po promenljivoj x, koji nam ukazuje na promenu funkcije z kada se promeni vrednost argumenta x, a pod pretpostavkom da se argument y ne menja;

$\frac{\partial z}{\partial y}$ – parcijalni izvod funkcije z po promenljivoj y, koji nam ukazuje na promenu funkcije z kada se promeni vrednost argumenta y, a pod pretpostavkom da se argument x ne menja.

Kako ćemo računati parcijalne izvode? Naravno, primenjujemo sva ista pravila računanja izvoda koja smo do sada naučili kod funkcija jednog argumenta, samo je potrebno da pazimo šta smatramo promenljivom, a šta slobodnim članom („običnim brojem"). Pogledajmo jednostavan primer.

NAPOMENA: ALTERNATIVNI ZAPIS PARCIJALNIH IZVODA

U gornjem tekstu označili smo parcijalne izvode funkcije z po promenljivim x i y kao $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$. Ovo je ekvivalentno zapisu gde dodamo od čega zavisi naša funkcija z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z(x,y)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}$$

Primer 1.

Data je funkcija $z(x,y) = 2x + 3y - xy$. Izračunajte njene parcijalne izvode po x i y.

Izračunajmo prvo parcijalni izvod date funkcije z po promenljivoj x. Znači, x smatramo za promenljivu, a y za neki broj:

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = 2 - y$$

Kako smo došli do ovoga? Izvod od $2x$ po promenljivoj x je 2. Izvod od $3y$ po promenljivoj x je 0 (jer y nije promenljiva, već neki broj!). Izvod od $-xy$ po promenljivoj x je $-y$ (pokušajte da zamislite umesto y jednostavno da tu stoji neki broj, npr. 5 – izvod od $-5x$ bi bio -5, što znači izvod od $-xy$ je $-y$!).

Potom, izračunajmo parcijalni izvod date funkcije z po promenljivoj y. Znači, y smatramo za promenljivu, a x za neki broj:

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = 3 - x$$

Kako smo došli do ovoga? Izvod od $2x$ po promenljivoj y je 0 (jer x nije promenljiva, već neki broj!). Izvod od $3y$ po promenljivoj y je 3. Izvod od $-xy$ po promenljivoj y je $-x$ (pokušajte da zamislite umesto x jednostavno da tu stoji neki broj, npr. 5 – izvod od $-5y$ bi bio -5, što znači izvod od $-xy$ je $-x$!).

NE DAJTE SE OBESHRABRITI!
Trenutno vam sve ovo verovatno izgleda prilično zbunjujuće. Ne brinite, većina ljudi tako reaguje kada se prvi put susreće sa funkcijama dve (i više) promenljivih. Vežbajte i sigurni smo da će ovo ubrzo postati vrlo lako i jasno!

Sve ovo do sada smo radili za **parcijalne izvode prvog reda** (kao pandan *prvom* izvodu funkcije jednog argumenta). Sa druge strane, takođe postoje **parcijalni izvodi drugog reda** (kao pandan *drugom* izvodu funkcije jednog argumenta). Ideje su slične kao i kod parcijalnih izvoda prvog reda, samo treba da naviknemo na zapis.

Naša funkcija dva argumenta z ima sledeće parcijalne izvode drugog reda:
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – ovo računamo kao izvod $\frac{\partial z}{\partial x}$ po promenljivoj x
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – ovo računamo kao izvod $\frac{\partial z}{\partial y}$ po promenljivoj y
$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ – ovo računamo kao izvod $\frac{\partial z}{\partial x}$ po promenljivoj y
$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ – ovo računamo kao izvod $\frac{\partial z}{\partial y}$ po promenljivoj x

Pogledajmo jednostavan primer.

Primer 2.
Data je funkcija $z(x,y) = 2x^2 + 3y - xy$. Izračunajte njene parcijalne izvode drugog reda po x i y.

Izračunajmo prvo parcijalne izvode prvog reda:
$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = 4x - y$$
$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = 3 - x$$

Sada, izračunajmo parcijalni izvod drugog reda $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ tako što uradimo izvod od $\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}$ po promenljivoj x:
$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2} = 4$$

Kako smo ovo dobili? Izvod od $4x$ po x je 4, a izvod od $-y$ po x je nula, jer je y neki broj, a ne promenljiva.

Izračunajmo parcijalni izvod drugog reda $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ tako što uradimo izvod od $\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}$ po promenljivoj y:

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

Kako smo ovo dobili? Izvod od 3 po promenljivoj y je 0, a izvod od $-x$ po promenljivoj y je takođe nula, jer je x neki broj, a ne promenljiva.

Izračunajmo parcijalni izvod drugog reda $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ tako što uradimo izvod od $\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}$ po promenljivoj y:

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x \partial y} = -1$$

Kako smo ovo dobili? Izvod od $4x$ po promenljivoj y je 0, jer je x neki broj, a ne promenljiva. Izvod od $-y$ po promenljivoj y je -1.

Izračunajmo parcijalni izvod drugog reda $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ tako što uradimo izvod od $\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}$ po promenljivoj x:

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y \partial x} = -1$$

Kako smo ovo dobili? Izvod od 3 po promenljivoj x je 0. Izvod od $-x$ po promenljivoj x je -1.

NAPOMENA: UVEK VAŽI SLEDEĆE!

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

NAPOMENA: DOBRO OVO PROVEŽBAJTE!

Ne brinite ako vam sve ovo izgleda komplikovano – samo dosta vežbajte! Veoma je bitno da sve ovo dobro uvežbate za ispit, jer je sve ovo ključno da znamo kod ispitnih zadataka iz ekstrema (a ovi zadaci se veoma često javljaju na ispitu!)

Totalni diferencijal

Podsetite se da smo kod funkcija jednog argumenta imali diferencijal funkcije, koji je jednostavno predstavljao vrednost za koju se funkcija promeni kada dođe do određene promene argumenta, i imali smo jednostavnu formulu:

$$df(x) = f'(x) \cdot dx$$

gde je $f'(x)$ prvi izvod funkcije jednog argumenta po promenljivoj x, dx označava promenu promenljive x, a $df(x)$ označava diferencijal funkcije jednog argumenta $f(x)$.

Sličan princip imamo i kod funkcije dva argumenta $z(x,y)$, gde analiziramo **totalni diferencijal.** Čemu ovakav naziv? Totalni diferencijal nam govori kolika je totalna promena funkcije kada dođe do promene njenih argumenata. Formule su nešto složenijeg zapisa, ali je logika ista kao i kod funkcija jednog argumenta. Razlikujemo totalni diferencijal prvog i drugog reda, te ćemo ih odvojeno i analizirati.

1) Totalni diferencijal prvog reda

Totalni diferencijal prvog reda funkcije $z(x,y)$ dat je sledećom formulom:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

gde su $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ parcijalni izvodi prvog reda funkcije z.

Primer 1.

Ako je $z(x,y) = x^2y + x^3 + xy^2 + 2y^3$, izračunati $dz(1,2)$.

Prvo, izračunajmo parcijalne izvode:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 3x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2xy + 6y^2$$

Sada, zamenimo ovo u formulu za totalni diferencijal prvog reda:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$dz = (2xy + 3x^2 + y^2)dx + (x^2 + 2xy + 6y^2)dy$$

Dodatno, u zadatku nam se traži da izračunamo vrednost totalnog diferencijala u tački $(1,2)$, odnosno kada je $x = 1$ i $y = 2$:

$$dz(1,2) = (2 \cdot 1 \cdot 2 + 3(1)^2 + 2^2)dx + (1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 6(2)^2)dy$$

$$dz(1,2) = 11dx + 29dy$$

Primer 2.

Izračunati totalni diferencijal prvog reda funkcije $z(x,y) = e^{xy}$ u tački $M(1,0)$.

Prvo, izračunajmo parcijalne izvode:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy} \cdot (xy)'_x = e^{xy} \cdot y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy} \cdot (xy)'_y = e^{xy} \cdot x$$

Sada, zamenimo ovo u formulu za totalni diferencijal prvog reda:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$dz = (e^{xy} \cdot y)dx + (e^{xy} \cdot x)dy$$

Dodatno, u zadatku nam se traži da izračunamo vrednost totalnog diferencijala u tački $M(1,0)$ odnosno kada je $x = 1$ i $y = 0$:

$$dz(1,0) = (e^0 \cdot 0)dx + (e^0 \cdot 1)dy$$

$$dz(1,0) = dy$$

2) Totalni diferencijal drugog reda

Totalni diferencijal drugog reda funkcije $z(x, y)$ dat je sledećom formulom:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

gde su $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ i $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ parcijalni izvodi drugog reda funkcije z.

Primer 3.

Data je funkcija $z(x, y) = 2x^2 + 3y - xy$. Izračunajte d^2z.

Prvo, izračunajmo parcijalne izvode prvog reda:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3 - x$$

Potom, izračunajmo parcijalne izvode drugog reda:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1$$

Sada, zamenimo ovo u formulu za totalni diferencijal drugog reda:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

$$d^2z = 4dx^2 + 2(-1)dxdy + 0 \cdot dy^2$$

$$d^2z = 4dx^2 - 2dxdy$$

Aproksimacija funkcije po Tejloru i Maklorenu

Suštinska ideja Tejlora i Maklorena je da funkciju možemo da aproksimiramo (približno odredimo njenu vrednost) kao polinom određenog stepena u okolini neke tačke (a,b), pritom koristeći određenu formulu. Tejlorova formula za funkciju dva argumenta je sledeća:

Tejlorova formula (za funkciju dva argumenta).

$$f(x,y) \approx z(a,b) + (x-a)\frac{\partial z(a,b)}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial z(a,b)}{\partial y}$$
$$+\frac{1}{2}\left((x-a)^2\frac{\partial^2 z(a,b)}{\partial x^2} + 2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 z(a,b)}{\partial x \partial y} + (y-b)^2\frac{\partial^2 z(a,b)}{\partial y^2}\right)$$

gde imamo:

$z(a,b)$ je vrednost funkcije u tački (a,b)

$\frac{\partial z(a,b)}{\partial x}$ je parcijalni izvod prvog reda funkcije z po promenljivoj x u tački (a,b)

$\frac{\partial z(a,b)}{\partial y}$ je parcijalni izvod prvog reda funkcije z po promenljivoj y u tački (a,b)

$\frac{\partial^2 z(a,b)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z(a,b)}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z(a,b)}{\partial y^2}$ su parcijalni izvodi drugog reda funkcije z u tački (a,b)

Potrebno je samo da izračunamo sve parcijalne izvode i njihove vrednosti u tački $M(a,b)$, nakon čega treba da ih zamenimo u ovu formulu i to je rešenje. Pogledajmo ovo na primeru.

Primer.

Aproksimirati funkciju $z(x,y) = x^3 + 3xy^2 + xy - 2$ Tejlorovom aproksimacijom u okolini tačke $M(1,1)$, tj. po stepenima binoma $x-1$ i $y-1$.

Iz postavke zadatka očigledno je da $a = 1$, $b = 1$ (isti je postupak kao i kod Tejlorove aproksimacije za funkciju jednog argumenta za pronalaženje ovih vrednosti). Potom, treba da izračunamo sve parcijalne izvode. Parcijalni izvodi su:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 + y$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6xy + x$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y + 1$$

Vrednosti ovih parcijalnih izvoda u tački $M(1,1)$ su:

$$\frac{\partial z(1,1)}{\partial x} = 3 + 3 + 1 = 7$$

$$\frac{\partial z(1,1)}{\partial y} = 6 + 1 = 7$$

$$\frac{\partial^2 z(1,1)}{\partial x^2} = 6$$

$$\frac{\partial^2 z(1,1)}{\partial y^2} = 6$$

$$\frac{\partial^2 z(1,1)}{\partial x \partial y} = 6 + 1 = 7$$

Vrednost funkcije u tački $M(1,1)$ je:

$$z(x,y) = x^3 + 3xy^2 + xy - 2$$

$$z(1,1) = 1^3 + 3 \ + 1 - 2 = 3$$

Konačno, zamenimo sve vrednosti u formulu:

$$z(x,y) \approx 3 + (x-1)7 + (y-1)7$$
$$+\frac{1}{2}((x-1)^2 6 + 2(x-1)(y-1)7 + (y-1)^2 6)$$

$$z(x,y) \approx 3 + 7(x-1) + 7(y-1)$$
$$+3(x-1)^2 + 7(x-1)(y-1) + 3(y-1)^2$$