Lekcija 9: Tangenta i normala

Pregled lekcije

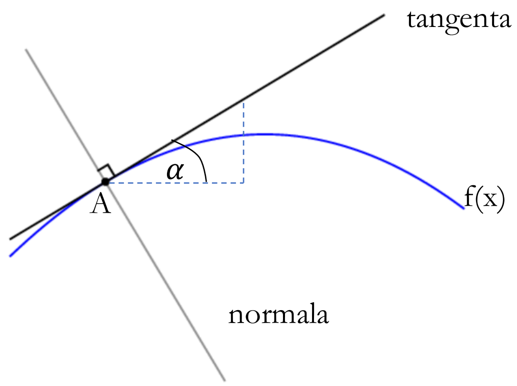
U okviru ove lekcije imaćete priliku da naučite sledeće:

- **suštinu tangente i normale** – kako izgleda tangenta, a kako normala na funkciju;
- **formule** – naučićemo formule za određivanje jednačine tangente i normale u tački, kao i formule za određivanje koeficijenta pravca tangente i normale i ugla koji tangenta zaklapa sa horizontalnom osom;
- **kolokvijumske trikove za zadatke iz ove oblasti** – obrađene su i brojne „fore" koje su se javljale na kolokvijumima iz prethodnih godina.

Kako izgleda tangenta, a kako normala?

Ovo sigurno već znate iz gradiva za prvi kolokvijum (analitička geometrija), ali nije na odmet da se podsetimo šta predstavljaju tangenta, a šta normala na neku funkciju.
1) Tangenta predstavlja pravu liniju koja **dodiruje** funkciju u nekoj tački.
2) Normala predstavlja pravu liniju koja **seče** funkciju u tački pod uglom od 90 stepeni

Grafički, tangenta i normala u tački A na neku funkciju $f(x)$ izgledaju ovako:



Osnovne formule

Sve što radimo u ovoj lekciji oslanjaće se na sledeće formule, koje morate veoma dobro naučiti ($y'(M)$ je izvod funkcije y u tački $M(a,b)$):

- **jednačina prave tangente u tački $\boldsymbol{M(a,b)}$**:

$$y - b = y'(M) \cdot (x - a)$$

- **koeficijent pravca (nagib) tangente u tački $\boldsymbol{M(a,b)}$**:

$$k_T = y'(M)$$

- **jednačina prave normale u tački $\boldsymbol{M(a,b)}$:**

$$y - b = -\frac{1}{y'(M)} \cdot (x - a)$$

- **koeficijent pravca (nagib) normale u tački $\boldsymbol{M(a,b)}$:**

$$k_N = -\frac{1}{y'(M)}$$

- **ugao koji tangenta zaklapa u tački $\boldsymbol{M(a,b)}$ sa $\boldsymbol{x}$-osom:**

$$\alpha = arctgk_T$$
$$k_T = tg\alpha$$

Uradimo jedan sveobuhvatni primer u pogledu ovih formula.

Primer.

Data je funkcija $y = \frac{3x-2}{2x-3}$ i tačka $M(2,4)$. Odrediti:

a) jednačinu tangente i normale

b) koeficijente pravca tangente i normale

c) tangens ugla koji tangenta zaklapa sa x-osom

d) ugao alfa koji tangenta zaklapa sa x-osom

Pre svega, u zadacima sa tangentom i normalom potrebno je da nađemo izvod $y'(M)$, koji je ključan za svaku formulu. U ovom zadatku potrebno je da nađemo $y'(2,4)$.

Kada uradimo izvod date funkcije y, dobijamo:

$$y' = \frac{-5}{(2x-3)^2}$$

Odredimo vrednost ovog izvoda u tački $M(2,4)$:

$$y'(2,4) = \frac{-5}{(2 \cdot 2 - 3)^2} = -5$$

Takođe, ne zaboravimo da je $x = a, y = b$ (kao i kod Tejlora/Maklorena za funkciju dva argumenta).

Pod a) nam se traži da odredimo jednačinu tangente i normale. Jednačina tangente je:

$$y - b = y'(M) \cdot (x - a)$$
$$y - 4 = y'(2,4) \cdot (x - 2)$$
$$y - 4 = -5 \cdot (x - 2)$$
$$y - 4 = -5x + 10$$
$$y = -5x + 14$$

Jednačina normale je:

$$y - b = -\frac{1}{y'(M)} \cdot (x - a)$$
$$y - 4 = \frac{1}{5} \cdot (x - 2)$$
$$y - 4 = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}$$
$$y = \frac{1}{5}x + \frac{18}{5}$$

Pod b) nam se traže koeficijenti pravca tangente i normale. Koeficijent pravca tangente je:

$$k_T = y'(M)$$
$$k_T = y'(2,4)$$
$$k_T = -5$$

Koeficijent pravca normale je:

$$k_N = -\frac{1}{y'(M)}$$
$$k_N = -\frac{1}{y'(2,4)}$$
$$k_N = \frac{1}{5}$$

Pod c): Tangens ugla koji tangenta zaklapa sa x-osom je:

$$tg\alpha = k_T$$
$$tg\alpha = -5$$

Pod d): Ugao alfa koji tangenta zaklapa sa x-osom je:

$$\alpha = arctgk_T$$
$$\alpha = arctg(-5)$$

Fore za zadatke

Pored osnovnih pravila, potrebno je da imate „keca u rukavu“ za rešavanje zadatka ukoliko primetite da ne možete dobiti rešenje standardnim postupcima. Ovde ćemo prezentovati nekoliko „fora“ koje su se javljale na prethodnim kolokvijuma i kako ih upotrebiti.

Fora #1: Funkcija je zadata implicitno

Tada je potrebno da računamo izvod koristeći postupak za izvod funkcije zadate implicitno (pogledati ovaj postupak u skripti na str.51-52).

Primer.

Odrediti jednačinu tangente i jednačinu normale krive $x^3 + y^3 - xy - 7 = 0$ koja prolazi kroz tačku $M(1,2)$.

Kao što vidimo, funkcija je data implicitno, tako da treba koristimo formulu:

$$y'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

gde je:

F funkcija gde imamo izmešano x i y

$\frac{\partial F}{\partial x}$ parcijalni izvod te funkcije po promenljivoj x

$\frac{\partial F}{\partial y}$ parcijalni izvod te funkcije po promenljivoj y

y'_x izvod cele funkcije po promenljivoj x (što nam se i traži u zadatku)

Funkcija F je:

$$F = x^3 + y^3 - xy - 7$$

Parcijalni izvodi su:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - x$$

Izvod je:

$$y'_x = -\frac{3x^2 - y}{3y^2 - x}$$

Sada, pronađimo vrednost ovog izvoda u tački $M(1,2)$:

$$y'(1,2) = -\frac{3(1)^2 - 2}{3(2)^2 - 1} = -\frac{1}{11}$$

Jednačina tangente je:

$$y - b = y'(M) \cdot (x - a)$$
$$y - 2 = y'(1,2) \cdot (x - 1)$$
$$y - 2 = -\frac{1}{11} \cdot (x - 1)$$
$$y - 2 = -\frac{1}{11}x + \frac{1}{11}$$
$$y = -\frac{1}{11}x + \frac{23}{11}$$

Jednačina normale je:

$$y - b = -\frac{1}{y'(M)} \cdot (x - a)$$
$$y - 2 = -\frac{1}{y'(1,2)} \cdot (x - 1)$$
$$y - 2 = 11 \cdot (x - 1)$$

$$y - 2 = 11x - 11$$
$$y = 11x - 9$$

Fora #2: Funkcija je zadata parametarski

Tada je potrebno da računamo izvod koristeći postupak za izvod funkcije zadate parametarski (pogledati ovaj postupak na str.49-51).

Primer 1.

Odrediti jednačinu tangente i jednačinu normale krive $\begin{cases} x = \frac{5t}{t^2+1} \\ y = \frac{5t^2}{t^2+1} \end{cases}$ koja prolazi kroz tačku $M(2{,}4)$.

Kao što vidimo, funkcija je data parametarski, tako da koristimo formulu:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

gde je:

y'_t izvod funkcije y po promenljivoj t

x'_t izvod funkcije x po promenljivoj t

y'_x izvod funkcije y po promenljivoj x (što nam i treba u zadatku)

Izračunajmo izvode:

$$y'_t = \frac{dy}{dt} = \frac{10t}{(t^2+1)^2}$$

$$x'_t = \frac{dx}{dt} = \frac{5(-t^2+1)}{(t^2+1)^2}$$

Izvod funkcije je:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$y'_x = \frac{\frac{10t}{(t^2+1)^2}}{\frac{5(-t^2+1)}{(t^2+1)^2}} = \frac{2t}{-t^2+1}$$

Da bismo izračunali vrednost ovog izvoda u tački $M(2{,}4)$, potrebno je da nađemo koliko je t. Znamo da je $x = 2$, a $y = 4$. Ubacimo ovo da je $x = 2$ u $x(t)$:

$$x = \frac{5t}{t^2+1}$$
$$2 = \frac{5t}{t^2+1}$$
$$2t^2 + 2 = 5t$$
$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$
$$t = 2, \qquad t = \frac{1}{2}$$

Potom, ubacimo da je $y = 4$ u $y(t)$:

$$y = \frac{5t^2}{t^2+1}$$
$$4 = \frac{5t^2}{t^2+1}$$
$$4t^2 + 4 = 5t^2$$
$$4 - t^2 = 0$$
$$t = 2, \qquad t = -2$$

BITNA FORA! Uzimamo da je t onaj rezultat koji smo dobili da je **isti i kod ubacivanja $\boldsymbol{x(t)}$ i kod $\boldsymbol{y(t)}$.** Znači, to je $t = 2$. Ubacimo ovu vrednost u izvod:

$$y'_x(t=2) = \frac{2 \cdot 2}{-(2)^2+1} = \frac{4}{-3}$$

Jednačina tangente je:

$$y - b = y'(M) \cdot (x - a)$$
$$y - 4 = y'(2{,}4) \cdot (x - 2)$$
$$y - 4 = -\frac{4}{3} \cdot (x - 2)$$
$$y - 4 = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$$
$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3}$$

Jednačina normale je:

$$y - b = -\frac{1}{y'(M)} \cdot (x - a)$$
$$y - 4 = -\frac{1}{y'(2{,}4)} \cdot (x - 2)$$
$$y - 4 = \frac{3}{4} \cdot (x - 2)$$
$$y - 4 = \frac{3}{4}x - \frac{6}{4}$$
$$y = \frac{3}{4}x + \frac{10}{4}$$

Primer 2.

Odrediti jednačinu tangente i jednačinu normale krive $\begin{cases} x = \frac{5t}{t^2+1} \\ y = \frac{5t^2}{t^2+1} \end{cases}$ koja prolazi kroz tačku gde je $t = 2$.

Kao što vidimo, funkcija je data parametarski, tako da koristimo formulu:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

gde je:
y'_t izvod funkcije y po promenljivoj t
x'_t izvod funkcije x po promenljivoj t
y'_x izvod funkcije y po promenljivoj x (što nam i treba u zadatku)

Izračunajmo izvode:
$$y'_t = \frac{dy}{dt} = \frac{10t}{(t^2+1)^2}$$
$$x'_t = \frac{dx}{dt} = \frac{5(-t^2+1)}{(t^2+1)^2}$$

Izvod funkcije je:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$
$$y'_x = \frac{\frac{10t}{(t^2+1)^2}}{\frac{5(-t^2+1)}{(t^2+1)^2}} = \frac{2t}{-t^2+1}$$

Razlika u odnosu na prethodni primer: Dato nam je da je $t = 2$. Vrednost izvoda je:
$$y'_x(t=2) = \frac{2 \cdot 2}{-(2)^2+1} = -\frac{4}{3}$$

Kroz koju tačku treba da gledamo da prolazi tangenta/normala? Treba da izračunamo x i y za vrednost $t = 2$. Ovo lako činimo tako što ubacimo da je $t = 2$ u funkcije $x(t)$ i $y(t)$:
$$x(t) = \frac{5t}{t^2+1}$$
$$x(2) = \frac{5 \cdot 2}{2^2+1} = \frac{10}{5} = 2$$

$$y(t) = \frac{5t^2}{t^2+1}$$

$$y(2) = \frac{5(2)^2}{(2)^2+1} = \frac{20}{5} = 4$$

Tačka koju dodiruje tangenta/kroz koju prolazi normala je $M(2,4)$, tj. znamo da je $a = 2$, a $b = 4$. Stoga, računamo sledeće. Jednačina tangente je:
$$y - b = y'(M) \cdot (x - a)$$
$$y - 4 = y'(2,4) \cdot (x - 2)$$
$$y - 4 = -\frac{4}{3} \cdot (x - 2)$$

$$y-4=-\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}$$
$$y=-\frac{4}{3}x+\frac{20}{3}$$

Jednačina normale je:

$$y-b=-\frac{1}{y'(M)}\cdot(x-a)$$
$$y-4=-\frac{1}{y'(2{,}4)}\cdot(x-2)$$
$$y-4=\frac{3}{4}\cdot(x-2)$$
$$y-4=\frac{3}{4}x-\frac{6}{4}$$
$$y=\frac{3}{4}x+\frac{10}{4}$$

Primer 3.

Odrediti jednačinu tangente i jednačinu normale krive $\begin{cases} x(t)=2t+3 \\ y(t)=3t^2 \end{cases}$ koja prolazi kroz $x=2$.

Kao što vidimo, funkcija je data parametarski, tako da koristimo formulu:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$$

gde je:
y'_t izvod funkcije y po promenljivoj t
x'_t izvod funkcije x po promenljivoj t
y'_x izvod funkcije y po promenljivoj x (što nam i treba u zadatku)

Izračunajmo izvode:

$$y'_t=\frac{dy}{dt}=6t$$
$$x'_t=\frac{dx}{dt}=2$$

Izvod funkcije je:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$$
$$y'_x=\frac{6t}{2}=3t$$

Da bismo izračunali vrednost ovog izvoda, potrebno je da nađemo koliko je t. Znamo da je $x=2$. Ubacimo ovo u $x(t)$:

$$x(t)=2t+3$$

$$2 = 2t + 3$$
$$2t + 1 = 0$$
$$t = -\frac{1}{2}$$

Ubacimo ovo u izvod da bismo izračunali vrednost:

$$y'_x\left(t = -\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

Da bismo izračunali koordinatu y, zamenjujemo da je $t = -1/2$ u $y(t)$:

$$y(t) = 3t^2$$
$$y\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

Tačka koju tangenta dodiruje/koju normala seče jeste $M(2, ¾)$. Znamo da je $a = 2$, a $b = 3/4$. Stoga, računamo sledeće. Jednačina tangente je:

$$y - b = y'(M) \cdot (x - a)$$
$$y - \frac{3}{4} = y'\left(2, \frac{3}{4}\right) \cdot (x - 2)$$
$$y - \frac{3}{4} = -\frac{3}{2} \cdot (x - 2)$$
$$y - \frac{3}{4} = -\frac{3}{2}x + 3$$
$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{4}$$

Jednačina normale je:

$$y - b = -\frac{1}{y'(M)} \cdot (x - a)$$
$$y - \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot (x - 2)$$
$$y - \frac{3}{4} = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$
$$y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} + \frac{3}{4}$$
$$y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{12}$$

Fora #3: Koordinate tačke nisu direktno date

Tada je potrebno da obavimo određeni dodatni posao kako bismo dobili koordinate tačke. Najčešće je ovo veoma lako i direktno sledi iz funkcija. Pogledajmo primer.

Primer.
Odrediti jednačinu tangente na grafik funkcije $y = x^3 - 4x^2 + 3$ koja prolazi kroz tačku $M(1, y(1))$.

Izračunajmo prvu koordinatu tačke M. Vrednost funkcije u tački $x = 1$ dobijamo tako što ubacimo da je $x = 1$ u y:

$$y(x) = x^3 - 4x^2 + 3$$
$$y(1) = 1^3 - 4(1)^2 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$

Znači, tačka M ima koordinate 1 i 0, odnosno $a = 1$, $b = 0$.

Uradimo prvi izvod funkcije:

$$y'_x = 3x^2 - 8x$$

Vrednost ovog izvoda u tački $M(1,0)$ je:

$$y'(1,0) = 3(1)^2 - 8(1) = 3 - 8 = -5$$

Jednačina tangente je:

$$y - b = y'(M) \cdot (x - a)$$
$$y - 0 = y'(1,0) \cdot (x - 1)$$
$$y - 0 = -5 \cdot (x - 1)$$
$$y - 0 = -5x + 5$$
$$y = -5x + 5$$

Fora #4: Traži se koeficijent pravca tangente ili normale

Tada nije potrebno da računamo jednačinu tangente ili normale kao što smo u prethodnim primerima, nego treba da znamo formule za koeficijent pravca tangente i normale (pogledajte početak ove lekcije).

Primer 1.
Odrediti koeficijent pravca tangente krive $y = \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)$ u tački $(1,0)$.

Ovde nam se traži koeficijent pravca tangente. Znamo da je koeficijent pravca tangente:

$$k_T = y'(M)$$

Stoga, nađimo izvod funkcije y:

$$y' = \left(\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)'$$
$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right)'$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2}(x-1)'$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2}$$

Vrednost ovog izvoda u tački $(1,0)$ je:

$$y'(1,0) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-1}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Stoga, znamo da je koeficijent pravca (nagib) tangente u ovoj tački jednak:

$$k_T = y'(M)$$

$$k_T = \frac{1}{2}$$

Primer 2.

Odrediti koeficijent pravca normale krive $y = \arcsin\left(\frac{x-1}{4}\right)$ u tački $(1,5)$.

Ovde nam se traži koeficijent pravca normale. Znamo da je koeficijent pravca normale:

$$k_N = -\frac{1}{y'(M)}$$

Stoga, nađimo izvod funkcije y:

$$y' = \left(\arcsin\left(\frac{x-1}{4}\right)\right)'$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{4}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x-1}{4}\right)'$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{4}\right)^2}} \cdot \frac{1}{4}(x-1)'$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{4}\right)^2}} \cdot \frac{1}{4}$$

Vrednost ovog izvoda u tački $(1,5)$ je:

$$y'(1,5) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-1}{4}\right)^2}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Stoga, znamo da je koeficijent pravca (nagib) normale u ovoj tački jednak:

$$k_N = -\frac{1}{y'(M)}$$
$$k_N = -\frac{1}{\frac{1}{4}}$$
$$k_N = -4$$

Fora #5: Dat je koeficijent pravca i funkcija, a traže se tačke

Tada je potrebno da primenjujemo sličan postupak kao i ranije, ali u nešto drugom smeru, jer nam je koeficijent pravca već dat, a traže nam se tačke. Pogledajmo primer.

Primer 1.

Odrediti tačke na krivoj $x^2 + y^2 = 2$ u kojima tangenta na datu krivu ima koeficijent pravca jednak 1.

Funkciju iz zadatka možemo da izrazimo implicitno:

$$x^2 + y^2 = 2$$
$$x^2 + y^2 - 2 = 0$$

U zadatku nam je dato da je koeficijent pravca tangente jednak 1, odnosno znamo da je:

$$k_T = y'(M) = 1$$

Koristimo formulu:

$$y'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

gde je:

F funkcija gde imamo izmešano x i y

$\frac{\partial F}{\partial x}$ parcijalni izvod te funkcije po promenljivoj x

$\frac{\partial F}{\partial y}$ parcijalni izvod te funkcije po promenljivoj y

y'_x izvod cele funkcije po promenljivoj x (što nam je i potrebno u zadatku)

Funkcija F je:

$$F = x^2 + y^2 - 2$$

Parcijalni izvodi su:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$$

Izvod cele funkcije po promenljivoj x je:

$$y'_x = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Znamo da je vrednost 1, tako da imamo:

$$-\frac{x}{y} = 1$$
$$y = -x$$

Dobili smo vezu između x i y. Sada, ovo možemo da zamenimo u početnu implicitnu funkciju:

$$x^2 + y^2 - 2 = 0$$
$$x^2 + (-x)^2 - 2 = 0$$
$$2x^2 - 2 = 0$$
$$2x^2 = 2$$
$$x^2 = 1$$
$$x = 1, \qquad x = -1$$

Zamenimo obe vrednosti u vezu sa y kako bismo dobili vrednost za y:

$$y = -1$$
$$y = 1$$

Stoga, tražene tačke su $M(1, -1)$ i $N(-1,1)$.

Primer 2.

Odrediti tačke na krivoj $x^2 + y^2 = 2$ u kojima tangenta na datu krivu jeste oblika $y = c,\ c \in \mathbb{R}$.

Funkciju iz zadatka možemo da izrazimo implicitno:

$$x^2 + y^2 = 2$$
$$x^2 + y^2 - 2 = 0$$

U zadatku nam je dato da je koeficijent pravca tangente jednak 0 (jer je tangenta oblika $y = c$, što znači da je prava linija na nekom nivou $y = c$), odnosno znamo da je:

$$k_T = y'(M) = 0$$

Koristimo formulu:

$$y'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

gde je:

F funkcija gde imamo izmešano x i y

$\frac{\partial F}{\partial x}$ parcijalni izvod te funkcije po promenljivoj x

$\frac{\partial F}{\partial y}$ parcijalni izvod te funkcije po promenljivoj y

y'_x izvod cele funkcije po promenljivoj x (što nam je i potrebno u zadatku)

Funkcija F je:

$$F = x^2 + y^2 - 2$$

Parcijalni izvodi su:
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$$

Izvod je:
$$y'_x = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Znamo da je vrednost izvoda (što je jednako nagibu tangente) nula, tako da imamo:
$$-\frac{x}{y} = 0$$
$$x = 0$$

Zamenimo ovo u početnu funkciju:
$$x^2 + y^2 - 2 = 0$$
$$0 + y^2 - 2 = 0$$
$$y^2 = 2$$
$$y = \sqrt{2}, \qquad y = -\sqrt{2}$$

Stoga, tražene tačke su $M(0, \sqrt{2})$ i $N(0, -\sqrt{2})$.

Primer 3.
Odrediti tačke na krivoj $x^2 + y^2 = 2$ u kojima je tangenta na datu krivu paralelna sa x-osom.

Postupak je identičan prethodnom primeru – potrebno je da zaključimo da s obzirom da je tangenta paralelna sa x-osom, da je tangenta prava linija, te da je njen koeficijent pravca jednak nuli.

Fora #6: Kada je nagib nula ili beskonačno

Ovo su određeni specijalni slučajevi koji su vredni zasebne analize kroz određene primere, kako ne biste pogrešili na kolokvijumu ili ispitu.

Primer 1 (slučaj da je nagib nula).
Odrediti jednačinu normale na grafik funkcije $y = \sqrt{x}$ koja prolazi kroz tačku $M(0,0)$.

Uradimo prvi izvod funkcije:
$$y'_x = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Vrednost ovog izvoda u tački $M(0,0)$ je:

$$y'_x(0,0) = \frac{1}{2\sqrt{0}} = \frac{1}{0} = \infty$$

Jednačina normale je:

$$y - b = -\frac{1}{y'(0,0)} \cdot (x - a)$$
$$y - 0 = -\frac{1}{\infty} \cdot (x - 0)$$
$$y = 0 \cdot x$$
$$y = 0$$

U ovom slučaju, tangenta je horizontalna linija na nivou $y = 0$ i poklapa se sa x-osom!

Primer 2 (slučaj da je nagib beskonačno).
Odrediti jednačinu normale na grafik funkcije $y = -x^2$ koja prolazi kroz tačku $M(0,0)$.

Uradimo prvi izvod funkcije:

$$y'_x = -2x$$

Vrednost ovog izvoda u tački $M(0,0)$ je:

$$y'_x(0,0) = -2 \cdot 0 = 0$$

Jednačina normale je:

$$y - b = -\frac{1}{y'(M)} \cdot (x - a)$$

BITNA FORA! Ako zamenimo da je $y'(M) = 0$, dobićemo beskonačno u izrazu, što nam ne odgovara. Stoga, prvo pomnožimo ceo izraz sa $y'(M)$:

$$(y - b)y'(M) = -(x - a)$$

Sada zamenimo da je $y'(M) = 0$ da bismo dobili jednačinu normale:

$$(y - 0) \cdot 0 = -(x - 0)$$
$$0 = -x$$
$$x = 0$$

U ovom slučaju, jednačina normale je vertikalna linija na nivou $x = 0$ i poklapa se sa y-osom!

Fora #7: Data je funkcija i jednačina tangente/normale, a traže se tačke

Tada je potrebno da primenjujemo sličan postupak kao i ranije, ali u nešto drugom smeru, jer nam je jednačina tangente ili normale već data, a traže nam se tačke. Pogledajmo primer.

Primer 1.

Odrediti tačku u kojoj tangenta na krivu $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x$ ima jednačinu $y = x + 1$.

Iz jednačine tangente $y = x + 1$ možemo da zaključimo da je koeficijent pravca tangente jednak 1, odnosno:

$$y'(M) = 1$$

Izračunajmo izvod funkcije $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x$:

$$y' = x + 3$$

Ovaj izvod je jednak 1 u tački M koju tražimo, te imamo:

$$1 = x + 3$$
$$x = -2$$

Koordinatu y možemo da pronađemo iz funkcije tangente:

$$y = x + 1$$
$$y = -2 + 1$$
$$y = -1$$

Tražena tačka je $M(-2, -1)$.

Primer 2 (teža varijanta).
Odrediti vrednosti realnih parametara a i b tako da tangenta na krivu $y = ax^2 + bx$ u tački $x = 2$ ima jednačinu $y = x + 1$.

Iz jednačine tangente možemo da zaključimo da je koeficijent pravca tangente jednak 1, odnosno:

$$y'(M) = 1$$

Izračunajmo izvod funkcije:

$$y' = 2ax + b$$

Ovaj izvod je jednak 1 u tački koju tražimo, te imamo:

$$1 = 2ax + b$$
$$2ax = 1 - b$$
$$x = \frac{1 - b}{2a}$$

Koordinatu y možemo da pronađemo iz funkcije tangente:

$$y = x + 1$$
$$y = \frac{1 - b}{2a} + 1$$
$$y = \frac{2a + 1 - b}{2a}$$

Znamo da je $x = 2$, a y dobijamo iz funkcije tangente, znači $y = 3$. Zamenimo ovo da bismo dobili sistem:

$$2 = \frac{1-b}{2a} \to 4a = 1 - b \to a = \frac{1-b}{4}$$
$$3 = \frac{2a + 1 - b}{2a}$$

Zamenimo $a = \frac{1-b}{4}$ u drugu jednačinu:

$$3 = \frac{\frac{1-b}{2} + 1 - b}{\frac{1-b}{2}}$$
$$3 = \frac{\frac{1-b+2-2b}{2}}{\frac{1-b}{2}}$$
$$3 = \frac{3-3b}{1-b}$$
$$3 - 3b = 3 - 3b$$

Ovo je uvek tačna jednakost, tako da zaključujemo da $b \in \mathbb{R}$, dok je $a = \frac{1-b}{4}$, i ovo je konačno rešenje zadatka.