Statistika

Skripta za kolokvijum i pismeni ispit

Teorija i vežbe sa detaljnim objašnjenjima (**lekcije 1-10**)

Лекција 5: Дискретна случајна променљива

СЛУЧАЈНА ПРОМЕНЉИВА

Случајна (стохастичка) променљива X је променљива која је одређена исходом случајног експеримента. На основу исхода случајног експеримента, узима одређене **нумеричке** вредности.

Случајна променљива може бити:
(1) Дискретна (прекидна) случајна променљива – то је она случајна променљива која може да узима само **целе** нумеричке вредности
Пример: Бацамо новчић једанпут. Можемо добити „главу“ или „писмо“. Рецимо да уколико добијемо главу, вредност случајне променљиве X је 1, а уколико добијемо писмо, вредност случајне променљиве је 0. Случајна променљива X може за овај експеримент да узима само вредности 0 и 1.

(2) Континуелна (непрекидна) случајна променљива – то је она случајна променљива која може да узима **неограничени скуп** вредности
Пример: Висина, телесна тежина...

Задатак 1

Један од најпрофитабилнијих артикала у једној продавници је даљински систем за стартовање. Нека је X број таквих система инсталираних одређеног дана. Следећа табела приказује расподелу фреквенција за претходних 80 дана.

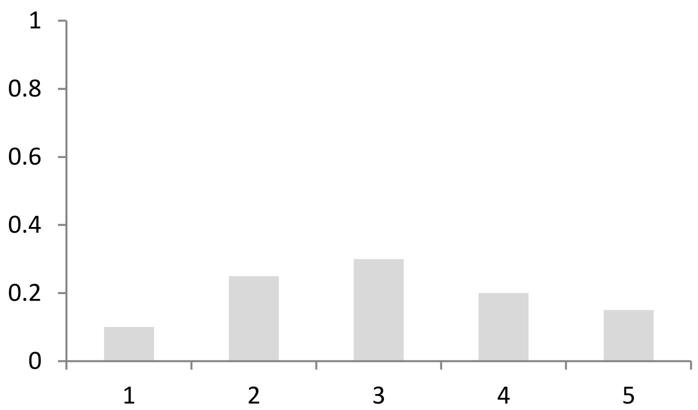
Број система инсталираних одређеног дана (x)	Број дана када је оволико система инсталирано (f)
1	8
2	20
3	24
4	16
5	12
Укупно Σ	80

а) Нацртати табелу расподеле вероватноћа за број даљинских система. Такође, нацртати штапићасти дијаграм.

Табела расподеле вероватноћа променљиве X

Број система инсталираних одређеног дана (x)	Релативна фреквенција $\frac{f}{\sum f}$
1	0,1
2	0,25
3	0,3
4	0,2
5	0,15
Укупно Σ	1

Штапићасти дијаграм за ову расподелу



б) Да ли су вероватноће приказане у табели под а) тачне или приближне вероватноће различитих исхода?

Одговор: Приближне, јер немамо сваку појединачну опсервацију, већ само фреквенције.

в) Одредити следеће вероватноће:

- $P(X = 3)$
- $P(X \geq 3)$
- $P(2 \leq X \leq 4)$
- $P(X < 4)$

Одговор: Гледамо нашу табелу релативних фреквенција.

Табела расподеле вероватноћа промењиве X

Број система инсталираних одређеног дана (x)	Релативна фреквенција $\frac{f}{\sum f}$
1	0,1
2	0,25
3	0,3
4	0,2
5	0,15
Укупно Σ	1

Прва ставка: $P(X = 3)$

- Која је вероватноћа да X узима вредност 3? Из табеле видимо:

Број система инсталираних одређеног дана (x)	Релативна фреквенција $\frac{f}{\sum f}$
1	0,1
2	0,25
3	**0,3**
4	0,2
5	0,15
Укупно Σ	1

Стога, очигледно је да је $P(X = 3) = 0{,}3$

Друга ставка: $P(X \geq 3)$

- Која је вероватноћа да X узима вредност 3 или неку већу вредност? Ова промењива може да узима вредности 1, 2, 3, 4 и 5. Значи практично ми тражимо вероватноћу да промењива узима вредност 3, 4 или 5.

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

Из табеле видимо:

Број система инсталираних одређеног дана (x)	Релативна фреквенција $\frac{f}{\sum f}$
1	0,1
2	0,25
3	**0,3**
4	**0,2**
5	**0,15**
Укупно Σ	1

Стога, очигледно је да је $P(X \geq 3) = 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}65$

Трећа ставка: $P(2 \leq X \leq 4)$

- На сличан начин као у претходном случају, утврђујемо да X може да узима вредност 2, 3 или 4, па имамо:

$$P(2 \leq X \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

Из табеле видимо:

Број система инсталираних одређеног дана (x)	Релативна фреквенција $\frac{f}{\sum f}$
1	0,1
2	**0,25**
3	**0,3**
4	**0,2**
5	0,15
Укупно Σ	1

Стога, очигледно је да је $P(2 \leq X \leq 4) = 0{,}25 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}75$

Четврта ставка: $P(X < 4)$

- На сличан начин као у претходном случају, утврђујемо да X може да узима вредност 1, 2 и 3 - **обратите пажњу: не укључујемо 4 јер имамо знак „строго мање“ ($<$), а не мање или једнако ($\leq$).**

$$P(X < 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

Из табеле видимо:

Број система инсталираних одређеног дана (x)	Релативна фреквенција $\frac{f}{\sum f}$
1	**0,1**
2	**0,25**
3	**0,3**
4	0,2
5	0,15
Укупно Σ	1

Стога, очигледно је да је $P(X < 4) = 0{,}1 + 0{,}25 + 0{,}3 = 0{,}65$

Наравно, у свим овим ставкама имамо имплицитну претпоставку да су бројеви система инсталираних одређеног дана у односу на други дан независни (па зато можемо да сабирамо вероватноће).

АКСИОМЕ ДИСКРЕТНЕ СЛУЧАЈНЕ ПРОМЕНЉИВЕ X

Аксиоме случајне променљиве су тврдње у вези случајне променљиве које се не доказују, већ су једноставно тачне. То су:

(1) Вероватноћа реализоване вредности x мора имати вредност између 0 и 1:

$$0 \leq P(X = x) \leq 1$$

Напомена: Велико X означава случајну променљиву (нпр. X = „висина студента“), док мало x означава реализовану вредност (нпр. $x = 173\ cm$).

(2) Збир вероватноћа мора бити једнак 1 (за све опсервације од 1 до n):

$$\sum_{i=1}^{n} P\,(X) = 1$$

ОЧЕКИВАНА ВРЕДНОСТ И ВАРИЈАНСА ДИСКРЕТНЕ СЛУЧАЈНЕ ПРОМЕНЉИВЕ X

Ово су одређене вредности које можемо израчунати за одређену расподелу вероватноћа случајне променљиве X.

(1) Очекивана вредност односи се на *просечну* вредност у датој серији података. За дискретну случајну променљиву, рачунамо је као суму производа вредности обележја и вероватноћа да се та вредност случајне променљиве догоди:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

(2) Варијанса је просечно *квадратно* одступање вредности обележја од аритметичке средине, тј. просечне вредности. Дакле, можемо је записати као:

$$Var(X) = E(X - E(X))^2$$

Често није лако израчунати варијансу по овој формули по дефиницији. Срећом, имамо радну формулу уз помоћ које је то доста лакше учинити, а која гласи:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

где је

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i$$

Не брините, све ће постати јасно на следећем примеру, и видећете да је ово у суштини врло једноставно.

Задатак 2

Расподела вероватноћа случајне променљиве X дата је табелом:

Табела расподеле вероватноћа променљиве X

x_i	p_i
0	0,125
1	0,375
2	0,375
3	0,125
Укупно Σ	1

а) Израчунати очекивану вредност и варијансу случајне промењиве X.

Да бисмо израчунали очекивану вредност, формирамо додатну колону у нашој табели:

x_i	p_i	$x_i p_i$
0	0,125	0
1	0,375	0,375
2	0,375	0,75
3	0,125	0,375
Укупно Σ	1	**1,5**

Очекивана вредност износи:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$$E(X) = 0 + 0{,}375 + 0{,}75 + 0{,}375 = \mathbf{1{,}5}$$

Варијансу ћемо рачунати преко радне формуле:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Како бисмо израчунали $E(X^2)$, формирамо додатну колону у табели:

x_i	p_i	$x_i p_i$	${x_i}^2 p_i$
0	0,125	0	0
1	0,375	0,375	0,375
2	0,375	0,75	1,5
3	0,125	0,375	1,125
Укупно Σ	1	1,5	**3**

Стога, $E(X^2) = 3$, тако да можемо израчунати варијансу:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$Var(X) = 3 - (1{,}5)^2$$

$$Var(X) = \mathbf{0{,}75}$$

б) Ако је $Y = 2X + 1$, одредити варијансу и очекивану вредност случајне променљиве Y.

ТРАНСФОРМАЦИЈА СЛУЧАЈНЕ ПРОМЕНЉИВЕ X

Било која *линеарна* трансформација случајне променљиве X је такође случајна променљива. На пример, $Y = 2X + 1$ је случајна променљива ако то важи за X.

(1) Очекивана вредност нове случајне променљиве може да се добије следећом формулом. Просто, x_i замењујемо трансформацијом те променљиве.

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i p_i = \sum_{i=1}^{n} (2x_i + 1) p_i$$

(2) Варијанса нове случајне променљиве може да се добије следећом формулом. Просто, X замењујемо новом променљивом Y.

$$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

Прво утврђујемо које вредности може да узме нова случајна променљива $Y = 2X + 1$:

x_i	p_i	$y_i = 2x_i + 1$
0	0,125	1
1	0,375	3
2	0,375	5
3	0,125	7
Укупно Σ	1	-

Вероватноће остају исте, тако да имамо расподелу вероватноћа нове случајне променљиве $Y = 2X + 1$:

y_i	p_i
1	0,125
3	0,375
5	0,375
7	0,125
Укупно Σ	1

Да бисмо израчунали очекивану вредност, формирамо додатну колону у нашој табели:

y_i	p_i	$y_i p_i$
1	0,125	0,125
3	0,375	1,125
5	0,375	1,875
7	0,125	0,875
Укупно Σ	1	**4**

Очекивана вредност износи:

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i p_i$$

$$E(Y) = 0{,}125 + 1{,}125 + 1{,}875 + 0{,}875 = \mathbf{4}$$

Варијансу ћемо рачунати преко радне формуле:

$$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

Како бисмо израчунали $E(Y^2)$, формирамо додатну колону у табели:

y_i	p_i	$y_i p_i$	${y_i}^2 p_i$
1	0,125	0,125	0,125
3	0,375	1,125	3,375
5	0,375	1,875	9,375
7	0,125	0,875	6,125
Укупно Σ	1	4	**19**

Стога, $E(Y^2) = 19$, тако да можемо израчунати варијансу:

$$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

$$Var(Y) = 19 - (4)^2$$

$$Var(Y) = \mathbf{3}$$

ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ ДИСКРЕТНЕ СЛУЧАЈНЕ ПРОМЕНЉИВЕ X

Функција расподеле означава вероватноћу да случајна променљива X узме вредности **мање или једнаке од одређене вредности x**. Ово записујемо као:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Задатак 3

Ако је $F(x) = 0$, колико износи вероватноћа да вредност случајне променљиве X буде већа од x?

- Дат нам је податак да је $F(x) = 0$. Другачије записано, ово је еквивалентно следећој тврдњи:

$$F(x) = P(X \leq x) = 0$$

Речима, функција расподеле од неке вредности x означава вероватноћу да случајна променљива X узме вредност мању или једнаку од конкретне вредности x, овде је 0.

Оно што нам се тражи у задатку јесте $P(X > x)$.

Уколико се подсетимо аксиома вероватноће, знамо да збир вероватноћа мора да буде 1. Случајна променљива X може бити или мања или једнака од неке вредности x, или већа од те вредности x – не постоји трећа опција! Тако да можемо записати:

$$P(X \leq x) + P(X > x) = 1$$

Када заменимо познати податак о функцији расподеле добијамо:

$$0 + P(X > x) = 1$$

$$\boldsymbol{P(X > x) = 1}$$

Задатак 4

Расподела вероватноћа броја позива на једној телефонској централи приказана је у табели.

x_i	p_i
0	0,1
1	0,1
2	0,2
3	0,3
4	0,3
Укупно Σ	1

Колико износе следеће вероватноће:

а) Вероватноћа да је случајна променљива X мања од 3 а већа од нуле?

б) Вероватноћа да је случајна променљива X мања од 2 а већа од 1?

в) Вероватноћа да је случајна променљива X мања од -5?

г) Вероватноћа да је случајна променљива X већа или једнака од 4?

д) Вероватноћа да је случајна променљива X тачно једнака 2,5?

Решење:

а) Статистички постављамо задатак:

$$P(0 < X < 3) = ?$$

Које вредности случајна променљива X може да узме? Из табеле видимо да су то 1 и 2, као и који резултат за вероватноћу добијамо:

x_i	p_i
0	0,1
1	0,1
2	0,2
3	0,3
4	0,3
Укупно Σ	1

$$P(0 < X < 3) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$$

б) Статистички постављамо задатак:

$$P(1 < X < 2) = ?$$

Које вредности случајна променљива X може да узме? С обзиром да је у питању дискретна случајна променљива која узима само целе вредности, X не може бити ништа између 1 и 2. Значи, тражимо вероватноћу **немогућег догађаја**. Стога:

$$P(1 < X < 2) = 0$$

в) Статистички постављамо задатак:

$$P(X < -5) = ?$$

Које вредности случајна променљива X може да узме? Из табеле видимо да X не може бити ништа испод нуле, тако да тражимо вероватноћу немогућег догађаја. Стога:

$$P(X < -5) = 0$$

г) Статистички постављамо задатак:

$$P(X \geq 4) = ?$$

Које вредности случајна променљива X може да узме? Из табеле видимо да услов задовољава само вредност 4:

x_i	p_i
0	0,1
1	0,1
2	0,2
3	0,3
4	**0,3**
Укупно Σ	1

Стога:

$$P(X \geq 4) = 0{,}3$$

д) Статистички постављамо задатак:

$$P(X = 2{,}5) = ?$$

Да ли случајна промењљива X уопште може да узме вредност 2,5? Из табеле видимо да не може, а и знамо да је реч о дискретној случајној промењљивој која може да узме само целе вредности. Значи, тражимо вероватноћу немогућег догађаја, што је:

$$P(X = 2{,}5) = 0$$

Задатак 5

Одредити расподелу вероватноћа случајне промењљиве X која представља збир бројева који се могу јавити приликом бацања 2 коцкице. Такође одредити очекивану вредност и варијансу.

Решење:

Могући исходи бацања коцкице два пута су:

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Саберимо цифре у сваком исходу како бисмо добили могуће исходе за збир бројева које добијемо при бацању коцкице два пута:

1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6
2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	2+6
3+1	3+2	3+3	3+4	3+5	3+6
4+1	4+2	4+3	4+4	4+5	4+6
5+1	5+2	5+3	5+4	5+5	5+6
6+1	6+2	6+3	6+4	6+5	6+6

Односно:

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

Могући исходи за случајну промењиву X су стога: 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 и 12.
Вероватноћа сваког појединачног исхода је 1/36 (јер имамо укупно 36 исхода). Само је потребно да гледамо у којим све случајевима добијамо резултат 2, у којим случајевима 3, и тако све до 12. Ово је лако, тако да ћемо то препустити вама. Формирамо расподелу вероватноћа:

x_i	p_i
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36
Укупно Σ	1

Знате да израчунате очекивану вредност и варијансу, зар не? Поступак препуштамо вама. Решења која треба да добијете су:

$$E(X) = 7,\ \ Var(X) = 5.8333$$

Задатак 6

5% аутомобила произведених у једном аутомобилском предузећу су дефектни. Претпоставимо да су 2 аутомобила изабрана случајним путем. Нека случајна променљива X означава број дефектних аутомобила. Одредити расподелу вероватноћа за X.

Решење.

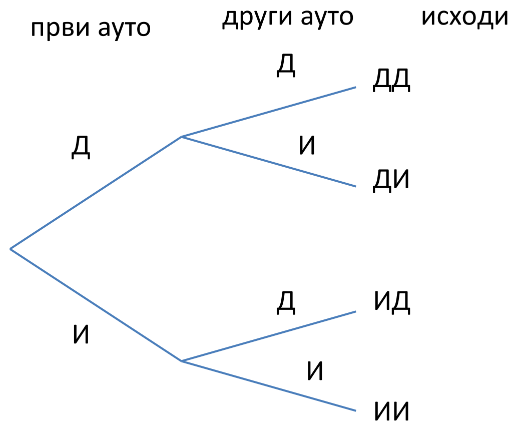
Када бирамо 2 аутомобила случајним путем, који су могући исходи?

- може се десити да ниједан није дефектан, тј. да је $X = 0$
- може се десити да је један од њих дефектан, тј. да је $X = 1$
- може се десити да су оба од њих дефектна, тј. да је $X = 2$

Које су вероватноће да извучени аутомобил буде дефектан, односно да буде исправан?

- 5% свих аутомобила је дефектно, тако да је вероватноћа да изаберемо дефектан аутомобил $P(\text{дефектан}) = 0{,}05$
- 95% свих аутомобила је исправно, тако да је вероватноћа да изаберемо исправан аутомобил $P(\text{исправан}) = 0{,}95$

Призовимо стабло исхода у помоћ!



Аутомобили се бирају независно, тако да појединачне вероватноће можемо да множимо.

- Вероватноћа за исход ДД: $0{,}05 \cdot 0{,}05 = 0{,}0025$
- Вероватноћа за исход ДИ: $0{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}0475$
- Вероватноћа за исход ИД: $0{,}95 \cdot 0{,}05 = 0{,}0475$
- Вероватноћа за исход ИИ: $0{,}95 \cdot 0{,}95 = 0{,}9025$

Сада лако формирамо табелу расподеле вероватноћа:

x_i (број дефектних аутомобила)	p_i (вероватноћа догађаја)
0	0,9025
1	0,095
2	0,0025
Укупно Σ	1

Задатак 7

Претпоставимо да је расподела вероватноћа броја телевизора по домаћинству дата следећом табелом:

x_i (број телевизора по домаћинству)	p_i (вероватноћа догађаја)
0	0,1
1	?
2	0,1
3	0,1
4	0,1

а) Одредити вероватноћу да ће случајно одабрано домаћинство имати више од 2, а мање од 10 телевизора.

б) Одредити функцију расподеле од -2.

в) Колико износи очекивана вредност и варијанса случајне промењљиве X?

Пре свега, непознату вероватноћу „?“ можемо да одредимо лако, јер знамо да је збир свих вероватноћа 1. Стога је вероватноћа за $X = 1$ једнака 0,6.

Решење:

а) Да бисмо решили овај задатак, потребно је да поставимо тражену вероватноћу на следећи начин:

$$P(2 < X < 10) = ?$$

Означимо у датој табели овај распон. Одатле можемо да видимо и резултат за ову вероватноћу.

x_i (број телевизора по домаћинству)	p_i (вероватноћа догађаја)
0	0,1
1	0,6
2	0,1
3	0,1
4	0,1

Случајна промењљива не може да узима вредности веће од 4. Такође, обратите пажњу да нисмо узели у обзир $X = 2$, јер се тражи вероватноћа да је X стриктно веће од 2, и стриктно мање од 10 (да смо имали вредност 10, такође је не бисмо узели у обзир). Ово је честа грешка студената тако да пазите! Резултат је:

$$P(2 < X < 10) = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$$

б) Тражи нам се функција расподеле за вредност $X = -2$. По дефиницији функције расподеле знамо да је:

$$F(-2) = P(X \leq -2)$$

Ову вероватноћу нам је лако наћи. Приметимо да случајна промењљива X не може да узима вредности које су мање од 0, што видимо из табеле. Стога, резултат је:

$$F(-2) = P(X \leq -2) = 0$$

в) Као што смо већ много пута урадили у скрипти, рачунамо очекивану вредност и варијансу, што бисте требали већ сами да знате да урадите. У наставку ћемо вам написати детаљно решење:

x_i (број телевизора по домаћинству)	p_i (вероватноћа догађаја)	$x_i p_i$	${x_i}^2 p_i$
0	0,1	0	0
1	0,6	0,6	0,6
2	0,1	0,2	0,4
3	0,1	0,3	0,9
4	0,1	0,4	1,6
Укупно Σ	1	1,5	3,5

$$E(X) = 1{,}5$$
$$E(X^2) = 3{,}5$$
$$Var(X) = 1{,}25$$

Задатак 8

Дата је расподела вероватноћа случајне променљиве X. Одредити и нацртати расподелу вероватноћа случајне променљиве $Y = 3X + 3$.

x_i	p_i
0	1/8
1	1/8
2	2/8
3	2/8
4	1/8
5	1/8
Укупно Σ	1

ГРАФИЧКИ ПРИКАЗ РАСПОДЕЛЕ ВЕРОВАТНОЋА

Само мала напомена – расподела вероватноћа увек се црта графички преко **штапићастог дијаграма**.

Решење:

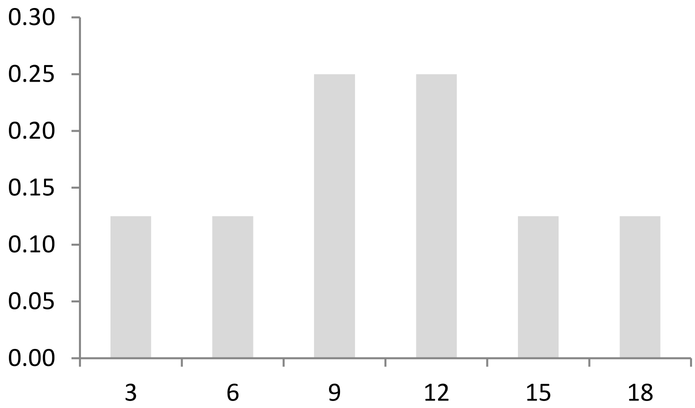
Потребно је да формирамо расподелу вероватноћа за случајну променљиву Y. Случајна променљива X има исходе 0, 1, 2, 3, 4 и 5. Случајна променљива Y је само линеарна трансформација ових исхода, прецизније $Y = 3X + 3$. Стога, вероватноће остају исте, а исходе за случајну променљиву Y добијамо када заменимо вредности исхода X. Значи, исходи за случајну променљиву Y су:

$$Y = 3 \cdot 0 + 3 = 3$$
$$Y = 3 \cdot 1 + 3 = 6$$
$$Y = 3 \cdot 2 + 3 = 9$$
$$Y = 3 \cdot 3 + 3 = 12$$
$$Y = 3 \cdot 4 + 3 = 15$$
$$Y = 3 \cdot 5 + 3 = 18$$

На основу овога, лако можемо формирати расподелу вероватноћа случајне променљиве Y у следећем табеларном приказу.

y_i	p_i
3	1/8
6	1/8
9	2/8
12	2/8
15	1/8
18	1/8
Укупно Σ	1

Расподелу вероватноћа треба да представимо и графичким путем у виду штапићастог дијаграма.



Задатак 9

Дата је расподела вероватноћа броја запослених одсутних са посла у току једне недеље. Колико износи очекивани број запослених одсутних са посла?

x_i	p_i
0	0,18
1	0,30
2	0,25
3	0,15
4	0,10
5	?
Укупно Σ	1

Решење:

Потребно је да израчунамо очекивану вредност $E(X)$. Покушајте да ово урадите сами, јер смо сигурни да знате ово да урадите! Коначно решење је $E(X) = 1{,}75$.

Задатак 10

Случајна променљива X има следећу расподелу вероватноћа:

x_i	p_i
0	2k
1	3k
2	13k
3	2k

а) Колико износи $P(-5 < X \leq 2)$?

б) Колико износи $F(2{,}22)$?

Решење:

Пре свега, потребно је да одредимо тачне износе вероватноћа, а да бисмо ово учинили, треба да одредимо вредности коефицијента k. На основу аксиоме вероватноћа, знамо да је збир вероватноћа свих исхода случајне променљиве једнак 1. Стога:

$$2k + 3k + 13k + 2k = 1$$

Ово је једначина са једном непознатом коју врло једноставно можемо решити:

$$20k = 1$$
$$k = 1/20$$

Замењујемо вредност коефицијента k у почетну расподелу вероватноћа како бисмо добили тачне износе вероватноћа за сваки исход:

x_i	p_i
0	2/20
1	3/20
2	13/20
3	2/20
Укупно Σ	1

Сада можемо да приступимо решавању ставки под а) и б).

а) Колико износи $P(-5 < X \leq 2)$?

- Заинтересовани смо за исходе -4, -3, -2, -1, 0, 1 и 2. Табеларно, то представља део:

x_i	p_i
0	2/20
1	3/20
2	13/20
3	2/20
Укупно Σ	1

Стога, очигледно је да је:

$$P(-5 < X \leq 2) = \frac{2}{20} + \frac{3}{20} + \frac{13}{20} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

б) Колико износи $F(2{,}22)$?

- Ово је функција расподеле коју можемо раставити на:

$$F(2{,}22) = P(X \leq 2{,}22)$$

С обзиром да је случајна променљива X дискретна (може да узима само целе вредности, што је очигледно и из табеле), ово је идентично следећој вероватноћи:

$$P(X \leq 2{,}22) = P(X \leq 2)$$

Другим речима, дискретна случајна променљива свакако не може да узима вредности између 2 и 2,22 јер су те вредности нису дискретне („цели бројеви“). Зато важи горња једнакост.

Заинтересовани смо за исходе мање или једнаке од 2, тј. за 0, 1 и 2. Значи, резултат је исти као и у случају под а):

$$P(X \leq 2) = \frac{2}{20} + \frac{3}{20} + \frac{13}{20} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$